Contents

1 Uma breve introdução à Relatividade Especial **3**

1.1 Introdução e Público alvo 3
1.2 Revisão necessária de Derivadas e Operadores Diferenciais . . 5
1.2.1 Derivadas Totais 5
1.2.2 Derivadas Parciais 6
1.2.3 Operadores Diferenciais em Vetores e Funções 6
1.2.4 Operador Laplaciano 8
1.2.5 Operador Rotacional 9
1.2.6 Os operadores diferenciais e as equações de Maxwell . . 9
1.2.7 Ambiguidade Gauge (calibre) 11
1.2.8 Atividades 12
1.2.9 Recomendações finais 13
1.3 O que são Buracos Negros? 14
1.4 A invariância da velocidade da luz 15
1.5 Mecânica Relativística 23
1.5.1 Energia cinética 23
1.5.2 Intervalos e eventos 27
1.5.3 Tempo próprio e tempo aparente 29
1.5.4 Impulso linear e energia relativísticos 30
1.5.5 Relação momento-energia 32
1.6 Cones de luz 33
1.7 Eletrodinâmica em notação covariante 36

2 Cálculo Tensorial **41**

2.1 Vetores, Tensores e 1-Formas 41
2.2 A dependência das componentes com a base 42
2.3 4-vetores e a convenção de Soma de Einstein 43
2.3.1 Convenção da Soma de Einstein: 44
2.4 Tensores contravariantes and covariantes 44
2.5 Vetores tangentes, 1-formas e a base coordenada 49
2.5.1 Tipo tensorial 51

2.6 Mudança de coordenadas 53
2.7 Métrica: o fundamento da Relatividade! 56
2.7.1 Elemento de linha de um espaço-tempo vazio 56
2.7.2 Tipos de 4-vetores: tipo-tempo, espaço e nulo 57
2.7.3 Cones de luz na Relatividade Geral 57
2.7.4 A métrica do espaço-tempo curvo 58
2.7.5 A métrica como uma matriz 60
2.8 Operações com o tensor métrico 62
2.9 Passando argumentos à métrica 63
2.10 Tensores e Variedades 65
2.10.1 Curvas Parametrizadas 65
2.10.2 Vetores Tangentes e 1-formas 66
2.10.3 Base 67
2.10.4 Regras de transformação 67
2.10.5 1-formas e produto escalar 68
2.11 Cálculo Tensorial 68
2.11.1 Princípio da Covariância 68
2.11.2 Derivadas de tensores 71
2.11.3 Símbolos de Christoffel 73
2.12 Formas Diferenciais e o produto exterior 76
2.12.1 Produto Exterior 76
2.12.2 Aplicação real 77
2.13 Derivada de Lie e Comutadores 77
2.13.1 Congruência de curvas 77
2.13.2 Derivada de Lie 79
2.14 Derivada absoluta e geodésicas 80
2.14.1 Derivada absoluta 80
2.14.2 Geodésicas 80
2.15 Tensor de Riemann 81
2.15.1 Definição do tensor de Riemann 81
2.15.2 Simetrias do tensor de Riemann 81
2.15.3 Tensor de Ricci e escalar de Ricci 82
2.15.4 Tensor de Einstein 82
2.16 As Equações de Campo de Einstein 83
2.16.1 A gravidade de Newton 83
2.16.2 Princípio de Equivalência 85
2.16.3 Princípio da Covariância 86
2.16.4 Limite Newtoniano 88
2.16.5 A constante cosmológica 92
2.17 A formulação Lagrangeana 93

3 Tensor energia-momento 95
3.1 Componentes de T_{ab} . . . 95
3.2 Leis de Conservação . . . 97
3.3 Poeira . . . 98
3.4 Fluido Perfeito . . . 99
3.5 Uma aplicação do fluido perfeito . . . 101
3.6 Campos Eletromagnéticos e Escalares . . . 104
3.7 Vetores de Killing . . . 107
3.8 Correntes conservadas . . . 109
3.9 Condições sobre a Energia . . . 112

4 As Equações de Estrutura de Cartan 115
4.1 Bases local e coordenada . . . 115
4.2 Bases não-holonômicas . . . 116
4.3 Coeficientes de Commutação . . . 117
4.4 Primeira Equação de Estrutura de Cartan . . . 119
4.5 Segunda equação de estrutura de Cartan . . . 120

5 Aplicando o formalismo de Cartan 123
5.1 Deduzindo o espaço-tempo de uma estrela esférica . . . 123
5.1.1 Primeira equação de Cartan . . . 123
5.1.2 Segunda equação de Cartan . . . 125
5.2 Calculando a curvatura . . . 129
5.3 O tensor de Einstein e o conteúdo de matéria . . . 130
5.4 Limites superiores à massa de uma estrela relativística . . . 136
5.5 A solução exterior de Schwarzschild . . . 141

6 Buracos Negros: o ponto final das estrelas 143
6.1 O que são Buracos Negros? . . . 143
6.2 Argumento Newtoniano para Buracos Negros . . . 146
6.3 Buracos Negros de Schwarzschild . . . 149
6.3.1 Valores físicos e aparentes . . . 150
6.3.2 Dilatação gravitacional do tempo . . . 151
6.3.3 Aceleração local . . . 151
6.3.4 O movimento radial da luz . . . 152
6.3.5 Redshift e Blueshift . . . 154
6.3.6 Movimento radial de uma massa de teste . . . 154
6.4 Órbitas de fótons e partículas com massa . . . 155
6.4.1 Equação Orbital . . . 156
6.4.2 Estabilidade das órbitas . . . 157
6.4.3 Órbitas Circulares . . . 160

6.4.4 Principais resultados para $k = 0$ 160
6.4.5 Condições para a captura 162
6.5 Buracos Negros não têm cabelo 162
6.6 Buracos Negros com rotação e carga elétrica 163
6.6.1 Família geral de soluções 163
6.6.2 Buraco Negro de Kerr-Newman 164
6.7 Física dos Buracos Negros 166
6.7.1 Mecanismo Penrose 166
6.7.2 Teorema das Áreas 167
6.7.3 Teorema das Áreas e o Processo Penrose 168
6.8 Termodinâmica de Buracos Negros 169
6.8.1 Teorema das Áreas e Entropia 169
6.8.2 Cálculo da Temperatura de um Buraco Negro 171
6.8.3 As quatro leis da Mecânica dos Buracos Negros 173
6.8.4 A segunda lei generalizada da Termodinâmica 174
6.9 Buracos Negros podem irradiar? 174
6.9.1 Mecânica Quântica e Gravidade 174
6.9.2 Buracos Negros perdem massa devido ao efeito Hawking177
6.10 Forças de maré em Buracos Negros 178
6.11 Intrépidos astronautas que se aventuram perto de Buracos Negros! 180
6.12 Buracos Negros Primordiais 183

7 A evolução de estrelas em objetos compactos 187
7.1 A trajetória evolucionária das estrelas 187
7.1.1 Proto-estrela 187
7.1.2 Sequência Principal: energia total 188
7.1.3 Sequência principal: luminosidade e tempo de vida . . 190
7.1.4 Sequência Principal: uma estimativa da relação M versus L 191
7.1.5 Sequência Principal: reações nucleares no interior estelar192
7.1.6 Sequência Principal: cadeia p-p 194
7.1.7 Sequência principal: neutrinos também são liberados! . 196
7.1.8 Deixando a sequência principal 196
7.1.9 Anãs Brancas 198
7.1.10 Supernovas 204
7.1.11 O colapso do núcleo 206
7.1.12 Estrelas de Nêutrons 208
7.1.13 Resumo dos Objetos Compactos 211
7.2 A evidência observacional dos Buracos Negros 212
7.2.1 Sistemas binários 212

7.2.2 Ondas gravitacionais e a colisão de Buracos Negros . . 214
7.2.3 Gamma Ray Bursts: mortes estelares originando Buracos Negros? 218

8 A descrição de Buracos Negros em outras coordenadas 221
8.1 Coordenadas de Schwarzschild 221
8.2 Coordenadas de Eddington-Filkenstein 221
8.3 Movimento Radial de raios de luz em $r < 2m$ 222
8.4 A extensão de Kruskal-Szekeres 224

9 Buracos Negros com rotação 227
9.1 A métrica de Buracos Negros em rotação 227
9.2 Horizontes e Ergoesfera 228
9.3 Arrasto dos referenciais 229
9.4 A trajetória da luz na geometria de Kerr 233
9.5 Obtendo as Singularidades 234
9.6 Verificando a solução de vácuo usando o Maple 235

10 Diagramas de Carter-Penrose 237
10.1 Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski 237
10.2 Diagrama de Carter-Penrose para espaço-tempo de Schwarzschild 240

11 A métrica de Schwarzschild 243
11.1 Geometria e Relatividade 243
11.2 Tensores a partir da métrica 245
11.3 Calculando a Conexão 245
11.4 Componentes do tensor de Ricci 246
11.5 Calculando o tensor de Riemann 247
11.6 Resolvendo as equações para $A(r)$ e $B(r)$ 249
11.7 Desvio gravitacional para o vermelho 252
11.7.1 A escala de tempo para o sumiço 253

12 O movimento de partículas em torno de Buracos Negros 255
12.1 Definindo a Lagrangeana 255
12.2 Simplificando as equações usando simetria 258
12.3 Analisando e resolvendo as equações de movimento 258
12.4 Significado físico de E e h 259
12.5 A simetria esférica permite simplificações 261
12.6 Movimento Angular 262
12.7 Movimento radial de partículas com massa 263
12.8 Movimento Circular 268

13 A estabilidade das órbitas circulares **271**
13.1 Potencial Newtoniano 271
13.2 Caso Relativístico 272

14 Movimento da Luz **277**
14.1 Movimento Radial 277
14.2 Movimento Circular 279

15 Usando o Maple em Relatividade **281**
15.1 Introdução ao Maple 281
15.2 Usando o Pacote *Differential Geometry* 281
15.3 Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild 287
15.4 Estrela Relativística 290

16 A1: Resumo sobre Evolução Estelar **295**
16.1 References 296

Introdução à Relatividade Geral

Paulo Sérgio Custódio, *Prof.*
São Paulo SP, Brazil

November 11, 2019

Chapter 1

Uma breve introdução à Relatividade Especial

1.1 Introdução e Público alvo

Este é um curso sobre Buracos Negros (e Relatividade Geral), os mais bizarros objetos astrofísicos previstos pelas leis da física. Os Buracos Negros envolvem os nossos conceitos de espaço, tempo, luz e gravidade, portanto, a arena mais natural para descrevê-los é a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Esta teoria rompe com os conceitos mais prosaicos de espaço e tempo da Mecânica de Newton, e esta ruptura continua até os dias de hoje.

Nesta seção, nós iremos estudar os conceitos chave que estão por trás do estudo da luz e do eletromagnetismo, uma vez que esses conceitos são essenciais para estabelecer os alicerces da Teoria Especial da Relatividade e sua generalização: a Teoria Geral da Relatividade. Além disso, tais conceitos são essenciais para a correta compreensão dos Buracos Negros e sua física.

Apesar de introdutório, este curso é completo e autocontido: você terá contato com todos os ingredientes da matemática e da física, necessários à compreensão e ao trabalho sério de pesquisa nesta área. Os formalismos de tensores e o formalismo de Cartan, bem como o uso de ferramentas computacionais serão devidamente apresentados e explicados em todos os detalhes.

Desta forma, o estudante será capaz de prosseguir com textos ainda mais avançados e realizar pesquisa profissional na área. Note entretanto, que este é um curso voltado a um público específico. Ele é bastante adequado para alunos que já tiveram contato com o cálculo Diferencial e Matemática.

Logo, os pré-requisitos deste curso são: 1) derivadas totais e parciais, 2) integração e solução de equações diferenciais simples, 3) noção de espaços vetoriais e bases, coordenadas de vetores e componentes, 4) conhecimento

básico da relatividade especial e eletrodinâmica.

Ou seja, este curso é voltado a um público formado por estudantes de graduação em física ou matemática que estejam no final do terceiro ou quarto semestres dos seus cursos. Desta forma, a apresentação de relatividade especial no primeiro capítulo é resumida, pois supõe-se este pré-requisito por parte do estudante. Este curso de introdução à física de buracos negros não é uma exposição de divulgação científica, logo, caso o aluno não atenda a nenhum dos pré-requisitos acima, a sua compreensão dos tópicos deste curso poderá estar muito abaixo do que ele espera.

Todos os cálculos serão discutidos e explicados, mas uma vez que o público alvo possui os pré-requisitos acima, não nos deteremos em passagens algébricas extremamente triviais e simples, de modo que espera-se que o aluno obtenha facilmente os resultados que são muito imediatistas, deixando o texto elegante e inteligível, sem ser enfadonho ou prolixo demais. Todas as passagens mais elaboradas serão detalhadas com todo esmero e cuidado, mas onvido fortemente o estudante a realizar todos os cálculos necessários.

Por uma questão de escopo, tempo e espaço, há tópicos onde os principais resultados serão apresentados sem demonstração, como é o caso da radiação de Hawking. Isto evita que este texto de mais de 200 páginas se torne um monstro de 1000 páginas e o curso se torne maçante. Além disto, a apresentação do mesmo certamente iria se atrasar indefinidamente. No entanto eu tomei o cuidado especial de apresentá-lo de modo a não deixar lacunas na sua compreensão. Um tópico que aqui foi omitido é o paradoxo da perda de informação. Este é um tópico importante que pretendo tratar em uma versão avançada do curso, que será em breve disponibilizada online e em texto.

A indicação das referências onde se pode encontrar a dedução completa da radiação Hawking e o paradoxo da perda de informação se encontra na seção de referências ao final deste texto e no curso (versão online dele).

O uso de programas de computador (o programa Maple será aqui detalhado) é muito importante na pesquisa séria e iremos usá-los neste curso. O estudante poderá usar outros programas de sua preferência, como o Mathematica ou o Maxima (free), mas por motivos de escopo e tempo iremos abordar apenas o Maple.

Ok, iniciemos então os nossos estudos! Boa leitura e sucesso no mesmo!

1.2 Revisão necessária de Derivadas e Operadores Diferenciais

1.2.1 Derivadas Totais

A derivada de uma função $f(x)$ é indicada por:

$$\frac{df(x)}{dx} \tag{1.1}$$

Se $x = x(t)$ teremos a regra da cadeia:

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{1.2}$$

Exemplos de derivadas muito importantes:

$$\begin{cases} \frac{dx^n}{dx} = nx^{(n-1)} \\ \frac{dcos(x)}{dx} = -sin(x) \\ \frac{dsin(x)}{dx} = +cos(x) \\ \frac{de^x}{dx} = e^x \\ \frac{dln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \end{cases} \tag{1.3}$$

As derivadas acima são de longe as mais importantes encontradas na Física, Engenharia, etc.

A regra da cadeia vale aqui nesses exemplos, veja:

$$\frac{dcos(5x)}{dx} = -5sin(5x) \tag{1.4}$$

$$\frac{de^{cos(x)}}{dx} = e^{cos(x)}(-sin(x)) = -sin(x)e^{cos(x)} \tag{1.5}$$

A derivada da soma de duas funções é igual à soma das derivadas:

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} \tag{1.6}$$

E a derivada do produto satisfaz:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{1.7}$$

A derivada mede a taxa de variação de uma quantidade, logo, a derivada de constante é igual a zero:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \tag{1.8}$$

1.2.2 Derivadas Parciais

Às vezes nos deparamos com funções de duas ou mais variáveis. Entra em ação o conceito de derivada parcial, vamos a alguns exemplos para entendê-las. Seja uma função $f = f(x,y)$ de duas variáveis. A sua derivada com relação à variável x é:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \tag{1.9}$$

Para calcular a derivada acima, procede-se como se y fosse uma constante, vamos a um exemplo:

$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial y} = x^2$$

Derivadas de mais altas ordens: A segunda derivada da função $f(x)$ com relação a x é calculada como:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) \tag{1.11}$$

Ou seja, deriva-se uma vez, e deriva-se novamente, pois a ordem é 2, exemplo:

$$\frac{d^2x^5}{dx^2} = \frac{d}{dx}5x^4 = 5 \times 4x^3 = 20x^3 \tag{1.12}$$

1.2.3 Operadores Diferenciais em Vetores e Funções

O operador **gradiente** é um operador cujas componentes são as derivadas parciais em x, y, z. Ele é uma espécie de vetor cujas componentes irão atuar sobre uma função escalar, tomando as derivadas parciais.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.13}$$

Portanto, escolhendo-se a função $\Phi(x,y,z)$ o seu gradiente é dado por:

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \tag{1.14}$$

Exemplo 1: Na eletrostática, há uma função escalar, o potencial eletrostático Φ cujo gradiente deste, é o campo elétrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{1.15}$$

onde $\Phi = \Phi(x, y, z)$.

Exemplo 2: Na gravitação de Newton, o campo gravitacional (ou aceleração gravitacional) é dado pelo gradiente do potencial gravitacional ϕ:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \tag{1.16}$$

Seja $\Phi(x, y, z) = x^2 ycos(z)$. O seu gradiente é dado por:

$$\vec{\nabla}(\Phi) = \left(\frac{\partial x^2 ycos(z)}{\partial x}, \frac{\partial x^2 ycos(z)}{\partial y}, \frac{\partial x^2 ycos(z)}{\partial z} \right) = \\ \left(2xycos(z), x^2 cos(z), -x^2 ysin(z)\right)$$

Mas, na física são abundantes os exemplos de **campos vetoriais**, tais como o campo elétrico e o campo magnético, cujas componentes dependem do ponto. Logo, o vetor campo elétrico é uma função do ponto:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \tag{1.17}$$

Onde as componentes são funções do ponto:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(t, x, y, z) \\ E_y &= E_y(t, x, y, z) \\ E_z &= E_z(t, x, y, z) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Há um operador muito importante na eletrodinâmica, chamado **divergente**. Ele é uma combinação das derivadas parciais e atua fazendo o produto escalar sobre as componentes do vetor $\vec{E}$ acima. Em termos de operador, escrevemos o **divergente** (em coordenadas Cartesianas) como:

$$\vec{\nabla}. = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{1.19}$$

Ele atua sobre a função vetorial $\vec{E}$ realizando o **produto escalar** (note a presença do ponto), ou seja:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{1.20}$$

e, o resultado desta operação leva-nos a uma função nos reais, não é um vetor!

1.2.4 Operador Laplaciano

O operador Laplaciano é muito parecido com o divergente, que acima foi apresentado, mas ele não realiza o produto escalar. Ele envolve derivadas parciais de segunda ordem.

O Laplaciano de $\vec{E}$ é:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E} \tag{1.21}$$

Onde supõe-se que: $\vec{E} = \vec{E}(t, x, y, z)$. No lugar de uma função vetorial $\vec{E}$ podemos ter uma função escalar: $\Phi(x, y, z)$ e nada muda na construção acima.

Exemplo 3: Na teoria da gravitação de Newton, o potencial gravitacional $\Phi(x, y, z)$ satisfaz à equação:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho \tag{1.22}$$

onde: $\rho = \rho(x, y, z)$ é a densidade de massa que gera o potencial gravitacional $\phi(x, yz)$.

Exemplo 4: Equação de Onda.

A equação de onda para $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$ é definida por:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.23}$$

Se supusermos que $\Phi = \Phi(x, t)$ para a eq.(1.23) acima, uma possível solução para ela é:

$$\Phi(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} \tag{1.24}$$

onde:

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{1.25}$$

é interpretada como a velocidade da propagação da onda Φ na direção x.

A eq.(1.23) acima é uma EDP, equação diferencial parcial. Para verificarmos que (1.24) é solução dela, basta calcularmos a o Laplaciano e a derivada de segunda ordem no tempo. Ao fazê-lo, facilmente obtemos p/ o primeiro termo:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = A_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} =$$

$$= A_0 \frac{\partial}{\partial x}(ike^{i(kx-\omega t)}) = -A_0 k^2 e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.26}$$

E, o segundo termo da eq.(1.23) fica:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_0 e^{i(kx-\omega t)} = A_0 \frac{\omega^2}{v^2} e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.27}$$

Juntando as eqs.(1.26) e (1.27) no lado esquerdo da eq.(1.23), obtém-se:

$$-A_0 k^2 e^{i(kx-\omega t)} + A_0 \frac{\omega^2}{v^2} e^{i(kx-\omega t)} = 0 \tag{1.28}$$

Cancelando o termo: $A_0 e^{i(kx-\omega t)}$ que aparece em ambos os termos (o lado direito é zero), teremos:

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{v^2} \rightarrow v = \pm \frac{\omega}{k} \tag{1.29}$$

A relação: $\omega(k) = vk$ é denominada relação de dispersão da onda. No caso da onda luminosa (luz) a relação de dispersão é: $\omega(k) = ck$, onde $c = 3 \times 10^{10} cms^{-1}$ é a velocidade da luz.

1.2.5 Operador Rotacional

O operador rotacional é indicado por:

$$\vec{\nabla}\times \tag{1.30}$$

mas, ao invés de relizar um produto escalar, ele realiza um produto vetorial, e o argumento sobre o qual ele atua deve ser um vetor necessariamente. Se $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, então o rotacional é dado por:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{1.31}$$

Não se esqueça de que as componentes $E_x = E_x(x, y, z)$ são funções do ponto, o mesmo para E_y e E_z.

1.2.6 Os operadores diferenciais e as equações de Maxwell

Os operadores diferenciais acima guardam algumas relações entre eles, por exemplo: podemos aplicar um operador sobre o outro. Um exemplo é: o divergente do gradiente é o Laplaciano.

Vamos aplicar esta ideia a algumas das equações de Maxwell. A primeira equação de Maxwell relaciona a divergência do campo elétrico à presença da densidade de carga elétrica no espaço (cargas elétricas geram campo elétrico):

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.32}$$

Mas, em eletrostática, define-se um campo escalar Φ que é função das coordenadas espaciais (x, y, z) de modo que o campo elétrico é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{1.33}$$

Logo, aplicando-se a divergência do lado esquerdo, obtém-se:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.(-\nabla\Phi) = -\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \tag{1.34}$$

onde na última passagem usamos que o divergente do gradiente é o Laplaciano. Logo, obtivemos a equação:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \tag{1.35}$$

Mas, recorde-se que a eletrodinâmica de Maxwell ainda tem mais um vetor para nos preocuparmos: o campo magnético $\vec{B}$.

De forma análoga ao potencial eletrostático Φ, há uma função a partir da qual um operador diferencial pode gerar o campo magnético. Esta função é um vetor, chamado **potencial vetor $\vec{A}$.**

Mas, agora, $\vec{B}$ é dado pelo rotacional de $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.36}$$

Os operadores diferenciais compartilham alguma propriedades curiosas. Uma delas é que o divergente do rotacional é zero, não importa sobre qual vetor você aplique. Logo, teremos:

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0 \tag{1.37}$$

Logo: $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, mas esta nada mais é do que outra das equações de Maxwell! Esta equação mostra que não há cargas magnéticas isoladas (monopólos magnéticos). Os ímãs apresentam os dois pólos: norte e sul, para criarem as linhas de campo magnético.

Agora, se a situação envolve campos que dependem do tempo, o campo elétrico pode receber uma contribuição do potencial vetor $\vec{A}$. Quando isto ocorre, o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.38}$$

Vamos aplicar o rotacional de cada lado agora, mas antes disso, adiantemos que o **rotacional** do **gradiente** é sempre zero ($\vec{\nabla}\times\nabla = \vec{0}$), não importa sobre qual função esteja sendo aplicado. Desta forma, o primeiro termo do lado direito da equação acima será anulado:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \tag{1.39}$$

Mas, o primeiro termo à direita é zero, logo obtém-se (jogando-se o termo à direita não nulo para o lado esquerdo):

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{0} \tag{1.40}$$

Lembre-se que o rotacional de $\vec{A}$ é o campo magnético, logo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \tag{1.41}$$

E, obtivemos mais uma das equações de Maxwell! A lei de indução da Faraday! A única equação que ficou faltando na nossa descrição foi:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{J} \tag{1.42}$$

Onde: $\vec{J} = \rho\vec{V}$ é a densidade de corrente elétrica. Resumimos a situação da seguinte maneira: as 4 equações de Maxwell podem ser escritas e simplificadas usando-se duas funções: Φ e $\vec{A}$, o potencial eletrostático e o potencial vetor, respectivamente.

Conforme iremos ver nas próximas aulas, as equações de Maxwell se veem mais simplificadas ainda se unimos as duas quantidades acima em um único vetor de 4 componentes, um 4-vetor:

$$A^a = \left(\Phi, \vec{A}\right) = \left(\Phi, \vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z\right) \tag{1.43}$$

e, $a = 0, 1, 2, 3$: $A^0 = \Phi$, $A^1 = \vec{A}_x$ e assim por diante.

1.2.7 Ambiguidade Gauge (calibre)

Antes de encerrarmos esta revisão muito essencial do cálculo vetorial, é conveniente notarmos a existência de uma ambiguidade nas definições dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, em termos das componentes do 4-vetor $A^a = (\Phi, \vec{A})$. A primeira

ambiguidade vem da definição do campo magnético em termos do potencial vetor $\vec{A}$. Se nós escrevermos: $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$, onde f é uma função contínua e diferenciável das coordenadas do ponto (de modo que o seu gradiente exista), então, o campo magnético $\vec{B}'$ é:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) \tag{1.44}$$

Mas, o rotacional do gradiente é sempre zero! Logo, teremos:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{0} = \vec{B} \tag{1.45}$$

Em outras palavras, o campo magntico está bem definido por $\vec{A}$ a menos da ambiguidade de calibre dada pelo gradiente de f, mas f é uma função arbitrária. Isto implica que o potencial vetor não é mensurável diretamente. Desta forma, a relação:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \tag{1.46}$$

implica em que tanto $\vec{A}$ quanto $\vec{A}'$ não são únicos, devido à ambiguidade gauge que o gradiente de f impõe (pois obtém-se o mesmo campo $\vec{B}$). Finalmente, substitua a eq.(1.36) na eq.(1.40) e usando-se a ambiguidade gauge acima exposta, você obtém uma equação de onda para $\vec{A}(x, y, z, t)$ escolhendo-se um gauge onde:

$$\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = C \tag{1.47}$$

com $C =$ constante. Deixo esta atividade para você aluno, e há outros gauge na eletrodinâmica. Semelhantes ambiguidades também ocorrem na Relatividade Geral, quando tentamos obter a equação de ondas gravitacionais.

1.2.8 Atividades

1) Calcule o gradiente de: $\Phi(x, y, z) = cos(xy)sin(yz)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solução:

$$\vec{\nabla}\Phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

Onde as componentes são:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -ysin(xy)sin(yz)\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{cos(xy)sin(yz)x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = (-xsin(xy)sin(yz) + cos(xy)zcos(yz))\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} + \frac{cos(xy)sin(yz)y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = cos(xy)ycos(yz)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} + \frac{cos(xy)sin(yz)z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

2) Calcule o divergente de: $\vec{A}(x,y,z) = (x+y^2, cos(xy^3z), sin(xyz))$.
Solução:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 2x - 3xy^2zsin(xy^3z) + xycos(xyz)$$

3) Calcule o Laplaciano de: $\Phi(x,y,z) = x^2e^{(y-1)}cos(xy+z)$.
Solução:

$$\nabla^2\Phi(x,y,z) = -((x^4+x^2y^2-2)cos(xy+z) + 2xsin(xy+z)(x^2+2y))e^{(y-1)}$$

4) Calcule o rotacional dos vetores: $\vec{A} = (x,y,z)$ e $\vec{B} = (x^2y, xyz^3, x^2y + z^3)$.
Solução:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = (0,0,0)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left(-3xyz^2 + x^2, -2xy, yz^3 - x^2\right)$$

1.2.9 Recomendações finais

Em anexo ao curso disponibilizamos outra apostila em pdf com um curso de Equações Diferenciais que vai até o ponto das equações diferenciais separáveis e as não separáveis com fator integrante. As EDPs e suas soluções não são discutidas neste texto em anexo, mas ele tem muito material, muitos exercícios, e o uso de ferramentas computacionais para obter algumas soluções, então ele é fortemente recomendável. A operação de integração (integral) não será revista aqui, caso você não tenha visto nada sobre integração e técnicas de integração, não precisa parar o curso aqui, mas dê uma olhada em integrais um pouco antes de entrar na parte 3 do curso, pois iremos precisar deste conceito lá. Com a rápida revisão de derivadas aqui, podemos iniciar o nosso curso, também recomendo que dê uma rápida lida nas equações de Maxwell (na forma diferencial) antes de iniciar a primeira aula (livros: Halliday e Resnick, Feynman, material na Internet sobre as equações de Maxwell é abundante).

1.3 O que são Buracos Negros?

Mas, afinal, o que são Buracos Negros? A resposta a esta pergunta pode ser colocada de diversas maneiras equivalentes, e algumas delas serão um pouco mais formais. Vamos formular algumas versões mais elementares e mais à frente iremos melhorar as nossas descrições. Então, uma primeira e boa definição de Buracos Negros é:

Buracos negros são regiões finitas e fechadas, no espaço-tempo, cujo escape a partir do seu interior é absolutamente impossível.

Ou ainda: Buracos Negros são regiões fechadas e finitas, limitadas por um horizonte (superfície fechada também conhecida por horizonte de eventos) cuja velocidade de escape é igual à velocidade da luz. As definições acima ainda que não sejam muito rigorosas, servirão de base para compreendermos as suas principais propriedades, depois iremos aperfeiçoá-las.

Iremos estudar alguns tipos de Buracos Negros neste curso: há aqueles com massa, outros ainda com carga elétrica e rotação (além da massa é claro). Teoremas mostram que há apenas três tipos deles. O Buraco Negro mais simples possível tem apenas massa M e o seu tamanho é dado pela expressão:

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{1.48}$$

Esta quantidade é conhecida pelo nome de raio de Schwarzschild ou raio gravitacional de uma massa M.

Esta fórmula envolve a constante de gravitação universal de Newton: $G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ e a velocidade da luz no vácuo: $c = 299792.458 kms^{-1}$.

Os estudos e a pesquisa na Eletrodinâmica e Relatividade Especial mostram claramente que a velocidade da luz (no vácuo) é um limite absoluto à velocidade de propagação de qualquer sinal físico ou o movimento de uma partícula de massa inercial não nula. Este é um limite absoluto e independe do referencial onde tal limite é medido. A medida da velocidade da luz pode ser efetuada de diversas maneiras, mas essencialmente ele é um parâmetro definido por duas quantidades da eletrodinâmica: a permissividade elétrica do vácuo e a permeabilidade magńtica.

Além do estudo da gravidade, a compreensão dos Buracos Negros passa pelo estudo da luz e suas propriedades. Desta forma, agora, iremos estudar em detalhes a luz e suas propriedades.

1.4 A invariância da velocidade da luz

A Eletrodinâmica interpreta a luz como a propagação acoplada dos campos elétrico e magnético. Esta interpretação surgiu do estudo detalhado das equações de Maxwell e como elas formulam e definem uma equação de onda para a luz em si. A manipulação das equações de Maxwell leva a uma equação para o potencial vetor $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - (\epsilon_0 \mu_0) \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{1.49}$$

Onde: $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7} NA^{-2}$ e $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2}{\cdot}10^7$ são os valores da permissividade magnética e elétrica do vácuo, e tais valores (na época de Maxwell, por volta de 1870) eram conhecidos e medidos.

E o operador diferencial ∇^2 é definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

Por outro lado, a equação de onda (também era muito bem conhecida e estudada naquela época) para uma onda dada por $\vec{A}$ tem a forma matemática:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{1.50}$$

Ora, a coincidência matemática das duas equações não podia ser um acidente: a luz era então, a partir daquele momento, um fenômeno eletromagnético! Esta foi a grande unificação providenciada por James C. Maxwell.

Mas, na equação de onda, o parâmetro v é a velocidade de propagação de $\vec{A}$, logo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sim 2.997 \times 10^8 ms^{-1} \tag{1.51}$$

Além disso, usando-se os valores medidos dos parâmetros, a velocidade da onda $\vec{A}$ era idêntica (dentro das incertezas experimentais) à velocidade da luz. Logo, depreende-se, do valor medido, que a onda descrita por $\vec{A}$ é de fato nada mais do que a onda luminosa, ou a luz simplesmente dito.

A partir da definição da velocidade da luz, acima, começam a aparecer algumas bizarrices (provenientes da própria lógica). Ora, os parâmetros ϵ_0 e μ_0 são medidos em qualquer laboratório que contenha dispositivos eletrodinâmicos. Mesmo Galileu tinha percebido que dois sistemas de referência S e S' são perfeitamente equivalentes se um deles move-se à velocidade relativa constante com relação ao primeiro. Na verdade, a perspectiva de movimento em

si, é totalmente dependente do observador: um observador em S diz que S está em repouso e S' se move, um observador em S' afirma o mesmo para S'. Galileu já havia percebido que ambas as perspectivas são corretas.

Ora, suponha que em S você esteja realizando as medidas dos parâmetros eletrodinâmicos ϵ_0 e μ_0. Você obtém o valor da velocidade da luz, como medida em S. O mesmo (por inveja) faz o seu amigo em S', que, não querendo não ficar para trás, também resolve medir a velocidade da luz em seu referencial. Para ele (e para a luz!) S' está em repouso, logo, o valor que ele obtém para a velocidade da luz é o mesmo valor que o primeiro cientista obteve em S.

Evidentemente, os parâmetros ϵ_0 e μ_0 não têm como saber se o laboratório se move com relação ao outro! As medidas da velocidade da luz realizadas em qualquer sistema de referência inercial implicam que c tem o mesmo valor, em qualquer um deles! Isto é bizarro! Se eles medissem a velocidade de um trem, sob a perspectiva de dois sistemas de referência S e S', os resultados seriam completamente diferentes para a velocidade do trem sob a perspectiva de um ou de outro (a menos que S esteja também parado com relação a S').

Isto se deve ao fato de que, de acordo com a eq.(1.3), a velocidade da luz é por definição um parâmetro universal, no sentido de que ela não é afetada (ou mesmo definida) pelo estado inercial de movimento do laboratório ou da fonte da própria luz. Este fato, intrigante, obrigou Einstein e outro pesquisadores da época a repensarem como interpretar adequadamente as transformações entre sistemas de coordenadas, levando-se em conta a invariância da velocidade da luz.

Princípio da Relatividade:

A velocidade da luz é independente do movimento de sua fonte, do movimento do laboratório onde é medida ou mesmo da rotação do sistema de referência. Este é o **Princípio da Relatividade**, como enunciado por Albert Einstein em 1905.

Outro modo equivalente de enunciá-lo é: as leis da física se mantêm invariantes na forma sob a mudança entre quaisquer sistemas de referência inerciais. Em outras palavras: as expressões matemáticas das leis da física devem ser as mesmas para quaisquer sistemas de referência inerciais ou sob quaisquer transformações de coordenadas que relacionem dois quaisquer sistemas de referência inerciais.

Sistema de Referência Inercial: um sistema de referência é inercial quando vale a primeira lei de Newton neste sistema, ou seja, uma partícula livre de forças externas move-se de modo retilíneo e uniforme ou permanece em repouso com relação a ele.

Se uma partícula é livre de força externa resultante, mas ainda assim move-se de modo não uniforme, conclui-se que o sistema de referência é não

inercial (pode estar em rotação, por exemplo).

O suporte experimental para este princípio foi o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley. Neste experimento, deseja-se medir o efeito do éter sobre a propagação da luz, levando-se em conta o movimento da Terra. Imaginava-se que a luz precisava de um meio para a sua propagação. Este meio recebia o nome de éter.

A exigência de um meio para a sua propagação vem de outras analogias e do estudo de outros fenômenos ondulatórios: o som é uma onda com velocidade bem definida, mas o som precisa de um meio para a sua propagação. De fato, o som é uma pertubação da pressão com relação à densidade do meio, logo, o som é definido pelo meio, sendo portanto, logicamente impossível a propagação do som no vácuo.

Naquela época, imaginava-se que a velocidade da luz, dada pelos parâmetros ϵ e μ, era a velocidade da luz com relação ao éter. Mas, as medidas da velocidade da luz não pareciam depender da orientação do laboratório, e a Terra move-se de modo não trivial com relação a este meio (se ele existe). Logo, este experimento procurava detectar algum desvio na medida da velocidade da luz, levando-se em conta a direção onde a mesma era medida. Desta forma, montou-se um equipamento de interferência, com dois caminhos de luz perpendiculares entre si. O resultado do experimento (caso existisse o éter) seria a ocorrência de um padrão de interferência, cujo mesmo dependeria da velocidade de translação da Terra e da orientação relativa dos eixos do equipamento. O resultado foi completamente nulo: nenhuma interferência surgiu neste experimento!

Apesar do resultado nulo deste experimento, Einstein prosseguiu com a análise das transformações de coordenadas que deveriam deixar as leis da natureza inalteradas (e levar em conta, que a luz não deveria ter o seu valor alterado, sob estas transformações).

Muito antes de Einstein, com o advento das equações de Maxwell, alguns pesquisadores muito curiosos (iniciando-se por Fitzgerald, Lorentz e Poincaré) levantaram a seguinte questão: as equações de Maxwell mantêm a sua forma matemática sob uma transformação de Galileu entre dois sistemas de referência inerciais? Uma transformação de Galileu, ao longo dos eixos $X - X^{'}$, entre dois sistemas S e $S^{'}$ é dada por:

$$X^{'} = X - Vt \tag{1.52a}$$
$$t^{'} = t \tag{1.52b}$$
$$Y^{'} = Y \tag{1.52c}$$
$$Z^{'} = Z \tag{1.52d}$$

De acordo com as transformações acima, a segunda lei de Newton se mantém invariante, mas vamos colocar um rótulo na velocidade relativa entre S e $S^{'}$ para distinguir da velocidade $\vec{V}'$ e da velocidade $\vec{V}$ da mesma partícula como medida por $S^{'}$ e S, respectivamente:

$$X^{'} = X - V_r t \rightarrow V^{'} = V - V_r \tag{1.53}$$

Aplicando-se mais uma derivada no tempo obtém-se a relação entre as acelerações:

$$\vec{A}' = \vec{A} \tag{1.54}$$

Logo, a força sobre uma partícula no sistema $S^{'}$ é dada por:

$$\vec{F}' = m^{'}\vec{A}' = m\vec{A} = \vec{F} \tag{1.55}$$

Desta forma, conclui-se que a **segunda lei de Newton** se mantém invariante sob uma transformação de Galileu relacionando dois sistemas de referência inerciais. Vamos analisar agora, se o mesmo ocorre com as equações de Maxwell.

Por sua vez, as equações de Maxwell são dadas por:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.56a}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{1.56b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \tag{1.56c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{J} \tag{1.56d}$$

Aqui, $\vec{E}$ é o campo elétrico, $\vec{B}$ é o campo magnético, ρ é a densidade de cargas elétricas e $\vec{J}$ é a densidade de corrente elétrica. A primeira equação de Maxwell envolve o operador divergente e o lado esquerdo tem a forma:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial X} + \frac{\partial E_y}{\partial Y} + \frac{\partial E_z}{\partial Z} \tag{1.57}$$

onde escrevemos o operador divergente no sistema de coordenadas Cartesiano.

Se as equações de Maxwell se mantivessem invariantes na forma, sob as transformações de Galileu, as equações acima iriam apenas ganhar os rótulos "linha" em cima de cada quantidade. Então, por exemplo iríamos obter:

$$\vec{\nabla}'.\vec{E}' = \frac{\partial E_x^{'}}{\partial X'} + \frac{\partial E_y^{'}}{\partial Y'} + \frac{\partial E_z^{'}}{\partial Z'} = 4\pi\rho^{'} \tag{1.58}$$

e assim por diante, o mesmo para as outras. Mas, se você efetuar as mudanças de acordo com a transformação de Galileu, você irá ver que elas irão se modificar drasticamente, nem de longe se parecendo com as equações de Maxwell, originais.

Devido ao termo: $X^{'} = X - V_r t$ o operador de divergência sofre uma mudança muito brusca, a primeira componente da divergência se vê modificada para:

$$\frac{\partial}{\partial X'} = \frac{\partial}{\partial X - V_r \partial t} \tag{1.59}$$

que deve ser aplicada na componente: $E_x^{'}$, mas o termo extra não é cancelado por mais nada, de modo que a primeira equação de Maxwell se vê profundamente alterada. O mesmo vale para as demais, aparecendo termos que quebram a forma matemática das equações de Maxwell no sistema de referência $S^{'}$.

Uma vez que dois sistemas de referência inerciais são completamente equivalentes para escrevermos as leis da física, como a natureza deveria escolher a melhor ou mais simples forma entre dois sistemas de referência inerciais distintos? A modificação da forma das equações de Maxwell sob as transformações de Galileu não parecia fazer sentido.

Mas, os pesquisadores acima descobriram as corretas transformações que deixavam invariante as equações de Maxwell, sob a mudaną entre dois sistemas de referência inerciais S e $S^{'}$.

As transformações (ao longo dos eixos $X - X^{'}$) que deixam as equações de Maxwell invariantes são:

$$X^{'} = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{1.60a}$$

$$T^{'} = \frac{T - VX/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{1.60b}$$

$$Y^{'} = Y \tag{1.60c}$$

$$Z^{'} = Z \tag{1.60d}$$

Estas transformações levam o nome de **transformações de Lorentz.**

Apesar destas transformações terem sido obtidas muito antes de Einstein, a interpretação que lhes era atribuída era muito confusa e não havia consenso

sobre ela. O éter ainda poluía a interpretação das mesmas, e a contração dos comprimentos era equivocadamente interpretada como sendo um fenômeno atribuído às cargas. Observe que a interpretação física das equações era muito sutil mesmo para as mentes mais originais daquela época, tendo eludido-os por um certo período.

Einstein, em 1905, deduziu novamente estas transformações, e as interpretou sob uma nova óptica, num dos mais importantes trabalhos científicos jamais publicados. O artigo que as apresentava de modo adequado e com correta interpretação das mesmas intitulava-se: "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento".

Para encurtar a nossa exposição, Einstein e os demais pesquisadores concluíram que o éter não era mais necessário, e desta forma, a luz não precisa de um meio para a sua propagação.

A figura a seguir mostra dois sistemas de referência inerciais:

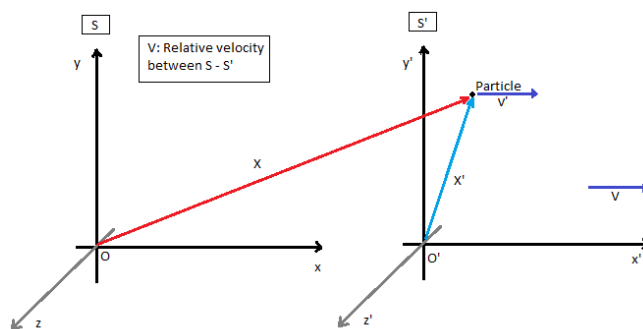



Figure 1.1: dois referenciais inerciais S e S'

Apesar da escolha particular dos eixos: $X - X'$, as transformações não dependem da escolha dos eixos (isotropia do espaço).

Vamos voltar à velocidade da luz, ela é numericamente igual à:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9792 \times 10^8 ms^{-1} \tag{1.61}$$

Ou seja, quase $300000 kms^{-1}$!

Para todos os efeitos, usamos de 3 a 4 dígitos decimais como uma boa aproximação para a maioria das discussões (você irá usar maior exatidão se estiver trabalhando com um caso prático, por exemplo, o sistema GPS, neste caso usa-se a velocidade da luz com muitos dígitos de precisão).

Convém observar ainda: os parâmetros μ_0 e ϵ_0 não dependem do estado de movimento do laboratório onde são medidos, mas esses valores são diferentes

em um cristal! Logo, a velocidade da luz é diferente em um cristal (menor do que no vácuo).

Por último, destaquemos que o parâmetro c nas transformações de Lorentz toma o papel de uma constante e não lhe atribuímos rótulo ao mudarmos para outro sistema de referência, uma vez que o seu valor é invariante.

Como consequência, a lei de transformação de velocidades de Galileu, para a Mecânica de Newton: $V^{'} = V - V_r$, não pode ser aplicada à luz. Vamos realizar uma pequena análise lógica, provando por absurdo que tal fórmula de composição de velocidades não se aplica à luz. Suponha que a velocidade da luz no sistema $S^{'}$ seja $c^{'}$ e c no sistema S, ambos sendo inerciais, um movendo-se com relação ao outro por V_r. Desta forma, poderíamos supor que:

$$c^{'} = c - V_r \tag{1.62}$$

Ou seja, a velocidade da luz em $S^{'}$ deveria ser diferente. No entanto, tomando a equação de onda:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1.63}$$

e, transformando-a para o sistema de referência $S^{'}$ iremos obter:

$$\nabla^{2'} \Phi^{'} - \frac{1}{c^{2'}}\left(\frac{\partial^2 \Phi^{'}}{\partial t^{2'}}\right) = 0 \tag{1.64}$$

Inserindo a eq.(1.15), tem-se:

$$\nabla^{2'} \Phi^{'} - \frac{1}{(c - V_r)^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi^{'}}{\partial t^{2'}}\right) = 0 \tag{1.65}$$

Agora, vamos analisar as eqs.(1.16) e (1.18): Na primeira, temos as medidas no referencial S e a medida da velocidade da luz neste referencial. Por outro lado, no referencial $S^{'}$, a medida da velocidade da luz, neste, depende da velocidade da luz inteiramente medida em outro sistema de referência S e da velocidade relativa V_r entre os referenciais. Mas, isto quer dizer que a velocidade da luz $c^{'}$, neste referencial, depende de modo arbitrário, de medidas não locais em outro sistema de referência!

Ora, não existe um único sistema de referência inercial que se move com relação a $S^{'}$: existem infinitos sistemas, com velocidades relativas diferentes, então pergunta-se: por que em $S^{'}$ apenas o sistema S influencia a medida da sua velocidade da luz?

Desta forma, a segunda equação, em $S^{'}$ não se mantém invariante: a sua invariância foi quebrada se insistirmos na lei de transformação de Galileu,

para a luz. O único modo de mantermos a invariância da equação da onda, quando mudamos entre dois sistemas de referência inerciais arbitrários é se: $c^{'} = c$, isto é, a velocidade da luz é a mesma em ambos os referenciais.

Outro argumentação equivalente é: da perspectiva de S, pode-se do mesmo modo escrever para a velocidade da luz: $c + V_r$, no lugar de c, pois para S é $S^{'}$ que se move! Mas, aqui, a unicidade é quebrada: antes em S o valor da velocidade da luz era c e agora é: $c + V_r$!

Se insistirmos no uso da transformação de Galileu, caímos em uma cilada lógica: 1) a equação de onda não mais é covariante, 2) a definição da velocidade da luz em um sistema em repouso não faz sentido ou tem unicidade (mesmo por que o conceito de sistema de referência em repouso não é absoluto).

Não restam dúvidas de que a lei de composição de velocidades relativas de Galileu não é mais válida na Mecânica Relativística. Mas, qual seria a generalização de eq.(1.63) que restaure o fato de que $c^{'} = c$?

É muito fácil mostrar que, usando-se: $\frac{dX^{'}}{dt^{'}} = V^{'}$, $\frac{dX}{dt} = V$ e S e $S^{'}$ são dois sistemas de referência inerciais relacionados por V_r, então, $V^{'}$ é dado por:

$$V^{'} = \frac{V + V_r}{\left(1 + \frac{V.V_r}{c^2}\right)} \tag{1.66}$$

Faça agora o seguinte experimento: se em S a velocidade de um pulso de luz é $V = c$, qual é a velocidade deste mesmo pulso de luz sob a perspectiva de $S^{'}$?

Usando a equação acima, teremos:

$$V^{'} = \frac{c + V_r}{\left(1 + \frac{c.V_r}{c^2}\right)} = c \tag{1.67}$$

Fantástico! Esta lei recupera justamente o Princípio da Relatividade que assegura que em todos os sistemas inerciais, a luz move-se à mesma velocidade! **Vamos fazer um resumo:** sob as transformações de Galileu, a segunda lei de Newton é mantida invariante: $\vec{F} = \vec{F}'$. Sob as transformações de Lorentz, as equações de Maxwell são mantidas invariantes e a equação de onda, também:

Vale em S:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) = 0 \text{ vale em } S$$

assim como em $S^{'}$:

$$\nabla^{2'}\Phi^{'} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi^{'}}{\partial t^{2'}}\right) = 0 \text{ vale em } S^{'}$$

As transformações de Lorentz deixam as equações de Maxwell invariantes, mas elas são um grupo particular de um conjunto maior, denominado grupo de Poincaré. As equações de Maxwell também são invariantes sob a rotação dos eixos.

Antes de finalizarmos esta seção, vamos apresentar (sem dedução) uma das mais notáveis implicações das transformações de Lorentz: a contração do comprimento. Se realizarmos a medida do comprimento de uma barra de metal no sistema em que ela se encontra em repouso, iremos denotá-lo por L_0. O comprimento desta mesma barra, vista por um sistema S' que se move à velocidade V com relação à barra é dado por:

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{1.68}$$

Portanto, no sistema em que a barra se encontra em movimento, o seu comprimento medido é sempre menor do que em repouso.

Uma fórmula semelhante pode ser obtida para se calcular o intervalo de tempo de um relógio em movimento se comparado com um em repouso. Desta vez, a raiz quadrada aparece no denominador, isto é, o intervalo de tempo de acordo com um relógio em movimento é dilatado se comparado ao intervalo de tempo onde os eventos estão em repouso com relação ao relógio. Convidamos o leitor a deduzir as fórmulas acima.

Por último, as transformações de Lorentz incentivaram Einstein a modificar a mecânica. Agora, precisamos levar em conta que as transformações usuais da mecânica de Newton são casos particulares quando os movimentos ocorrem a velocidades muito pequenas se comparadas à velocidade da luz. A modificação da mecânica é assunto do próximo segmento.

1.5 Mecânica Relativística

1.5.1 Energia cinética

As novas transformações entre sistemas de referência levaram a outras consequências notáveis, entre elas, uma alteração nas expressões de energia, momento linear, etc. Agora, a energia cinética de uma partícula com massa de repouso m é dada pela expressão:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - mc^2 \tag{1.69}$$

onde V é a velocidade da partícula.

O momento linear de uma partícula também se torna uma nova expressão como iremos verificar logo adiante. Agora, analisemos a expressão acima, com um pouco mais de cuidado. Primeiro, note que $E(0) = 0$, isto é, a energia cinética é zero quando a partícula está em repouso. Isto é razoável. Segundo, a massa entra nesta fórmula como a massa de repouso da partícula, isto é, a massa medida quando $V = 0$. Finalmente, no limite em que $V << c$ espera-se que a energia cinética volte a ser a mesma expressão como na teoria da mecânica de Newton, e isto de fato ocorre: $E(V << c) = \frac{mV^2}{2}$. É importante ter em mente que a mecânica de Newton deve ser recuperada como caso limite para $V << c$, em caso contrário, as novas expressões de energia e momento estarão mal formuladas.

O próximo passo é estudarmos o comportamento da energia cinética relativística no limite em que $V \to c$, isto é quando a velocidade se aproxima da velocidade da luz. Uma partícula não pode ter a sua velocidade modificada (em um mesmo referencial), a menos que um agente externo esteja transferindo energia para o movimento da mesma (força externa). Isto exige o consumo de trabalho (energia) externo. Vamos ver o que ocorre.

Antes disso, dê uma olhada no gráfico abaixo, elaborado no Maple ($\beta = \frac{V}{c}$):

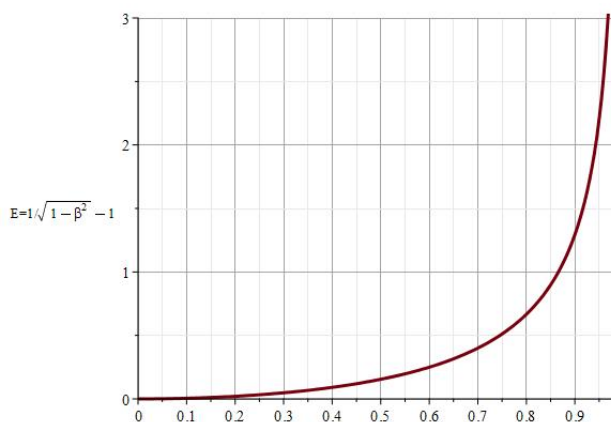



Figure 1.2: Energia Cinética $E(\beta)$

Note que, conforme $\beta \to 1$ a energia cinética relativística diverge, mas a barreira $V = c$ não é ultrapassada. Se o objeto tem o valor β no sistema de referência S, qual é a quantidade de energia que devemos transferir para ele, com o objetivo de acelerá-lo de β para $\beta + \delta\beta$?

O impulso ou energia transferidos para esta partícula reflete-se em um aumento diferencial da sua energia cinética. A fração de energia cinética ganha por intervalo $\delta\beta$ é dada pela derivada:

$$\frac{\delta E}{\delta \beta} = \frac{m\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \tag{1.70}$$

Aplicando-se o limite: $\beta \to 1$ nós obtemos:

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{\delta E}{\delta \beta} = +\infty \tag{1.71}$$

Portanto, conforme $\beta \to 1$ precisamos de uma taxa de transferência de impulso cada vez maior (derivada de $E(\beta)$) com o objetivo da partícula ganhar uma quantidade substancial $\delta\beta$. Mas esta derivada diverge!

De modo equivalente, o ganho diferencial em velocidade, por ganho de energia, é cada menor conforme o objeto é cada vez mais relativístico:

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{\delta \beta}{\delta E} = 0 \tag{1.72}$$

Desta forma, no limite em que a velocidade se aproxima da velocidade da luz, cada vez mais energia é necessária para um ganho infinitesimal de velocidade. Como resultado, a velocidade da luz não pode ser ultrapassada, por nenhuma partícula de massa de repouso $m > 0$. Podemos interpretar tal resultado dizendo que a massa inercial relativística aumenta conforme a partícula se aproxima da velocidade da luz: a massa aumenta mais rápido do que o ganho em velocidade se $V \to c$. Desta forma, muitos livros apresentam a seguinte expressão para a massa relativística:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{1.73}$$

No entanto, podemos conviver perfeitamente com as expressões relativísticas sem esta expressão para a massa, bastando colocar o fator de Lorentz: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ nos produtos, no momento adequado. Desta forma, é suficiente trabalharmos com a massa m como sendo sempre a massa de repouso.

Conclusão: não há energia disponível, em qualquer sistema de referência de sua escolha, onde seja possível acelerar uma partícula de massa $m > 0$ de modo que a mesma atinja a velocidade da luz, ou sequer a ultrapasse. Adicionalmente, as únicas partículas que se movem à velocidade da luz são o fóton (quanta da luz) e o gráviton (quanta das ondas gravitacionais), pois a massa das mesmas é zero.

Os fatos: 1) a velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência e 2) não é fisicamente possível atingir a velocidade da luz (partindo-se de uma velocidade prévia $V < c$), têm implicações diretas sobre a com-

preensão dos buracos negros, visto que a velocidade necessária para se escapar de sua superfície é a velocidade da luz.

Não é necessário muito esforço de pensamento, a partir daqui, imaginar que o escape para o infinito, de um objeto que tenha entrado em um Buraco Negro é permanentemente proibido de acordo com as leis da física que atualmente conhecemos.

Apenas para adiantar uma pequena e importante consideração aqui: note que na frase acima eu escrevi: 'superfície' com aspas, pois nos baseamos na eq.(1.1) que determina o tamanho de um buraco negro em termos de sua massa. Nas próximas aulas iremos mostrar (usando muitos argumentos) que um buraco negro não possui uma superfície sólida: a expressão: $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ não implica na existência de uma superfície onde você possa se sentar e esperar calmamente que algum dia a natureza abaixe o valor da velocidade da luz e você possa escapar! A situação é bem pior, pois uma vez que não há uma superfície sólida, não há onde um astronauta possa se segurar, e a imensa gravidade do Buraco Negro (se você estiver em $r = r_g$) irá sugá-lo, inevitavelmente.

Adicionalmente, iremos mostrar nesse curso, que além da velocidade de escape ser proibitiva, a aceleração necessária para se manter estático à 'superfície' em $r = r_g$ tende ao infinito. Isto é muito diferente do que ocorre na teoria da gravitação de Newton. Então, muito próximo a $r = r_g$ (chamamos esta 'superfície' de horizonte de eventos) o gasto em energia para sustentar um astronauta em sua posição também se torna proibitivo. Para finalizar esta pequena discussão: a velocidade de escape da superfície de um Buraco Negro é a velocidade da luz, mas como esta velocidade é a mesma, para qualquer sistema de referência, os Buracos Negros se tornam perigosos (neste aspecto) independentemente da escolha do seu sistema de referência, ou seja, as suas condições de escape não mudam. Nas seções mais avançadas iremos ver como a curvatura do espaço-tempo piora sensivelmente a possibilidade de uma navegação segura próximo da horizonte de eventos de um Buraco Negro.

Exercício 1: Prove que o limite: $V << c$ leva-nos a:

$$E(V) = \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - mc^2\right] \sim \frac{mV^2}{2}, \text{quando: } V << c \tag{1.74}$$

Dica: faça a expansão do lado esquerdo usando série de Taylor.

1.5.2 Intervalos e eventos

Antes de discutirmos a matemática da Relatividade Geral, é muito útil definirmos alguns ingredientes chave que serão usados através do texto e do curso, os quais são: evento, 4-vetores, intervalo e cone de luz.

Evento é qualquer ocorrência no espaço-tempo a qual podemos associar 4 coordenadas: (t, x, y, z) ou: (ct, x, y, z). Essas são as coordenadas do evento. Acendemos uma lâmpada nas coordenadas (ct, x, y, z), isto é um evento. Uma partícula chegou nas coordenadas: (ct, x, y, z), é outro exemplo de evento. O movimento de uma partícula pode ser considerado como uma sequência contínua de eventos.

Agora, vamos definir o intervalo no espaço-tempo entre dois eventos de coordenadas: $E_1 := (ct_1, X_1, Y_1, Z_1)$ e $E_2 := (ct_2, X_2, Y_2, Z_2)$.

O intervalo S entre os eventos acima é dado por:

$$S^2 = -c^2(t_1 - t_2)^2 + (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 \tag{1.75}$$

Observe que: um evento está associado a um ponto no espaço-tempo, logo, todo evento deve ter 4 coordenadas para descrevê-lo.

Eventos infinitesimalmente próximos:

Agora, suponha que nós temos dois eventos: E_1 e E_2 com coordenadas:

$$\begin{cases} E_1 := (ct, x, y, z) \\ E_2 := (ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz) \end{cases} \tag{1.76}$$

Intervalo ds:

Nós definimos o intervalo diferencial ds entre os eventos acima como a quantidade, cujo quadrado é dado por:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.77}$$

Esta expressão se parece muito com a regra de Pitgóras: na verdade, a parte espacial nada mais é do que a regra de Pitágoras em 3D. A parte temporal deve aparecer com sinal negativo, descrevendo a expansão de uma onda luminosa (frente esférica de uma onda).

Antes de prosseguirmos, é importante uma pequena observação: muitos livros denotam o intervalo como: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Isto não levanta problema algum, esta definição também vale, mas devemos partir para uma escolha, e vamos escolher o intervalo com sinal negativo no termo temporal.

Em seguida, sob a óptica desta nova definição, fazemos notar que o valor do intervalo ds entre dois eventos quaisquer não muda sob as transformações

de Lorentz. Este fato é uma consequência direta da invariância da velocidade da luz. Ou, de modo equivalente, podemos escrever as transformações entre dois sistemas de referência inerciais que deixam o quadrado do intervalo ds^2 invariante. Iremos descobrir que estas são nada mais do que as transformações de Lorentz.

Escrevemos ds^2 e $ds^{'2}$ como os quadrados dos intervalos entre dois eventos quaisquer no espaço-tempo, então, a **invariância da velocidade da luz** é completamente equivalente a dizer que: $ds^2 = ds^{'2}$:

$$\begin{cases} ds^{'2} = -c^2dt^{'2} + dx^{'2} + dy^{'2} + dz^{'2} \\ ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^{'2} = ds^2 \end{cases} \tag{1.78}$$

Podemos reformular a invariância da velocidade da luz, em termos do intervalo ds entre dois eventos E_1 e E_2 do seguinte modo:

Para quaisquer dois eventos E_1 e E_2, o intervalo ds entre eles, do ponto de vista de S e $S^{'}$, ambos referenciais inerciais, satisfaz:

$$ds^2 = ds^{2'} \tag{1.79}$$

Finalmente, vamos mostrar que o intervalo ds que um pulso de luz percorre no espaço-tempo, de acordo com um referencial S é:

$$ds^2 = 0 \tag{1.80}$$

Prova:

De acordo com S:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 \tag{1.81}$$

Mas: dr é o deslocamento deste pulso de luz, de acordo com S dentro do intervalo dt, logo, tem-se: $\frac{dr}{dt} = c$ o que implica: $dr^2 = c^2dt^2$. Inserindo acima, temos:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + c^2dt^2 = 0 \tag{1.82}$$

Pelo Princípio da Relatividade, a luz move-se com esta velocidade em qualquer sistema de referência, logo, $ds^2 = 0$ é o intervalo de um pulso de luz sob o ponto de vista de qualquer sistema de referência.

1.5.3 Tempo próprio e tempo aparente

Agora, considere que E_1 é o evento definido pela localização de uma partícula naquelas coordenadas. O evento E_2 é o evento onde esta partícula chega em outras coordenadas, de acordo com o mesmo referencial.

As diferenciais dx, dy, dz são os deslocamentos deste objeto de acordo com este referencial S.

Se dt é o intervalo de tempo medido por um observador em S, nós podemos definir a velocidade desta partícula, de modo usual, dividindo-se os deslocamentos por este intervalo de tempo.

Agora, considere um sistema de referência que está ligado à partícula: $S^{'}$.

Neste referencial é evidente que: $dx^{'} = dy^{'} = dz^{'} = 0$. Portanto, o intervalo de tempo para a partícula partir de E_1 e alcançar E_2 é dado por:

$$ds^2 = -c^2 dt^{'2} \tag{1.83}$$

Neste momento, vamos introduzir uma nomenclatura que é muito importante no jargão da área: nós iremos denominar $t^{'}$ como o **tempo próprio** τ motivados que estamos no sistema onde a partícula se encontra em repouso **referencial de repouso (rest frame)**. Escreveremos: $ds^2 = -c^2 d\tau^2$.

Note que: $d\tau$ é o intervalo de tempo (próprio) que é marcado por um relógio ligado ou presente com a partícula, marcando o tempo (de acordo com $S^{'}$) que a mesma levou para ir de E_1 para E_2.

Mas, o intervalo de tempo dt, medido no outro sistema de coordenadas, S, não é o mesmo, visto que de acordo com S, o objeto moveu-se para ir de E_1 para E_2. Este, dt é o intervalo de **tempo aparente**, como avaliado por S.

O interessante é: os dois intervalos de tempo dt e $d\tau$ não batem, como é de se esperar, e estão relecionados por: $\frac{dt}{d\tau} = (1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2}$ como iremos demonstrar logo em seguida.

Os 4-vetores X^a e X_a:

Agora, se nós considerarmos como evento as coordenadas de uma partícula de massa m, em um ponto P, então podemos associar o seguinte 4-vetor X^a de índice superior $a = 0, 1, 2, 3$:

$$X^a = (ct, X, Y, Z) \tag{1.84}$$

e de modo análogo:

$$X_a = (-ct, X, Y, Z) \tag{1.85}$$

o primeiro, X^a é chamado 4-vetor contravariante e o segundo, X_a é chamado de covariante.

Desta forma, temos (lembre-se que $a = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} X^0 = ct, X_0 = -ct \\ X^1 = X, X_1 = X \\ X^2 = Y, X_2 = Y \\ X^3 = Z, X_3 = Z \end{cases} \tag{1.86}$$

De modo que o produto escalar: $X_a X^a$ é dado por:

$$X^a X_a = (ct, X, Y, Z).(-ct, X, Y, Z) = -c^2 t^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{1.87}$$

note a similaridade com a definição de intervalo S^2.
De modo semelhante, o produto escalar: $dX^a.dX_a$ é:

$$\begin{aligned} dX^a dX_a = (cdt, dX, dY, dZ).(-cdt, dX, dY, dZ) = \\ -c^2 dt^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = ds^2 \end{aligned} \tag{1.88}$$

4-vetores velocidade: U^a e U_a:
A derivada deste 4-vetor com relação ao tempo-próprio τ é a **4-velocidade** U^a desta partícula:

$$U^a = \frac{d}{d\tau} X^a = \frac{d}{d\tau}(ct, X, Y, Z) \tag{1.89}$$

$$U_a = \frac{d}{d\tau} X_a = \frac{d}{d\tau}(-ct, X, Y, Z) \tag{1.90}$$

O produto escalar: $U_a U^a$ é:

$$U^a U_a = \frac{dX^a}{d\tau}.\frac{dX_a}{d\tau} = -\frac{c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2 \tag{1.91}$$

Por isto, deveremos estar atentos à mudança de sinal relativo às posições dos índices.

1.5.4 Impulso linear e energia relativísticos

Em seguida, definimos o momento-linear de uma partícula (impulso) como o 4-vetor: P^a dado pelo produto da massa e a 4-velocidade:

$$P^a = mU^a \tag{1.92}$$

onde: $U^a = \frac{dX^a}{d\tau}$ é a 4-velocidade da partícula com massa de repouso m. Usando as definiçoes acima, e um pouco de álgebra, é fácil mostrar que:

$$U^a = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(c, \vec{V}\right) \tag{1.93}$$

Fator de Lorentz:

para deduzir a relação acima, use a invariância do intervalo: $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$, denote $dr^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$:

$$\begin{aligned}
&-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 \rightarrow \\
&c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \left(\frac{dr}{cdt}\right)^2\right] \rightarrow \\
&\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Este fator, é chamado fator de Lorentz, e ao inserí-lo na eq.(1.32) nós obtemos a eq.(1.36).

Prova:

$$\begin{aligned}
U^a &= \frac{d}{d\tau} X^a = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} X^a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} X^a = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} (ct, X, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (c, \vec{V})
\end{aligned}$$

Usando a eq.(1.35) e a eq.(1.36) as componentes do 4-impulso linear P^a são:

$$P^a = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right) \tag{1.95}$$

onde a energia total e o momento linear relativísticos, são dados por:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e:

$$P^i = \frac{mV^i}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

onde definimos: $\beta = \frac{V}{c}$ e $i = 1, 2, 3$ indica as componentes espaciais, ou equivalentemente: $P^i \to \vec{P}$.

Prova:

$$P^a = mU^a = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}(c, \vec{V}) =$$

$$= \frac{(mc, m\vec{V})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \left(\frac{mc^2}{c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right)$$

note que: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ é a energia relativística total (inclui a energia associada à massa de repouso: mc^2) de uma partícula livre.

Como deduzimos a energia cinética? A energia cinética de uma partícula tem que ser zero quando $V = 0$, logo, vamos definí-la como: $K(V) = E(V) - C$. Sabe-se que: $K(0) = 0$, logo:

$$K(0) = E(0) - C = mc^2 - C = 0 \to C = mc^2 \tag{1.97}$$

Logo: $K(V) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - mc^2$, como foi definida em eq.(1.11).

1.5.5 Relação momento-energia

Adicionalmente, se um observador tem 4-velocidade V^a e a partícula tem 4-velocidade U^a, a energia da partícula medida no sistema de referência deste observador, é:

$$E = -P_a V^a \tag{1.98}$$

Se $V^a = U^a$ então: $E = mc^2$ como deveria ser!

Observe que:

$$E = -mU_a U^a = -m \left[\frac{dX_a}{d\tau} . \frac{dX^a}{d\tau} \right] \tag{1.99}$$

Mas: $dX_a.dX^a = (-cdt, d\vec{X}).(+cdt, d\vec{X}) = -c^2dt^2 + d\vec{X}^2 = -c^2d\tau^2$, portanto:

$$E = -m(-c^2) = mc^2 \tag{1.100}$$

Logo, se $V^a = U^a$ a partícula está em repouso no referencial do observador, e neste sistema a energia desta é: mc^2.

Finalmente, E, m e P satisfazem:

$$\begin{aligned} P^a P_a &= \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right) \cdot \left(-\frac{E}{c}, \vec{P}\right) = \\ &= -\frac{E^2}{c^2} + P^2 = mU^a mU_a = \\ &= -m^2 c^2 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Uma simples manipulação algébrica da expressão acima leva-nos a:

$$E^2 = c^2 P^2 + m^2 c^4 \tag{1.102}$$

Um sistema de unidades muito usado é aquele no qual: $c = 1$ logo: $E^2 = P^2 + m^2$, este é chamado sistema natural de unidades.

Na próxima seção nós apresentamos o conceito de cone de luz:

1.6 Cones de luz

Cones de luz são ingredientes essenciais na Teoria Especial da Relatividade bem como na Teoria Geral. Os cones de luz determinam a estrutura causal do espaço-tempo. Isto significa que eventos e o movimento de partículas devem obedecer ao cone de luz. Entretanto, diferentemente do que ocorre no espaço-tempo plano da Relatividade Especial, a curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria irá deformar e inclinar os cones de luz. Este conceito é muito importante para entendermos o que ocorre em torno de buracos negros, e próximo deles, onde a curvatura é significativa.

Mas, o que são cones de luz? Observe que uma fonte de luz esférica gera uma frente de onda luminosa no espaço-tempo, com formato esférico. O raio desta frente de onda aumenta de modo constante, uma vez que a velocidade da luz é constante. Uma projeção em um plano 2D irá gerar uma sombra de um anel circular cujo raio aumenta de modo que a sua derivada seja igual a c. Se realizarmos agora a projeção no tempo, isto é, se incluírmos o tempo, iremos obter a figura de um cone, cuja inclinação é dada pela velocidade da luz. Se usarmos o sistema natural, onde $c = 1$, um diagrama muito adequado coloca a inclinação como tendo 45 graus.

A seguinte pergunta é: como obter a forma do cone de luz?

Pulsos de luz se movem de acordo com: $ds^2 = 0$. Se resolvermos esta equação, iremos obter uma superfície esférica que se expande à velocidade c a partir da origem, onde o pulso foi disparado.

No espaço, nós temos uma frente de onda esférica, enquanto que no espaço-tempo, esta mesma frente de onda é nada mais do que um cone. O próximo passo agora é relacionarmos eventos aos cones de luz. A origem do pulso de luz, é um evento, iremos denotá-lo por p. A porção superior do cone de luz (e interna a ele) forma o conjunto de todos os eventos que **podem ser influenciados por p**, de modo causal, isto é: eles podem ser influenciados por sinais físicos cujas velocidades respeitam o limite da velocidade da luz. Todos os eventos que estão fora do cone de luz de p não podem ser alcançados por p, pois eles precisariam se mover a velocidades super-luminais. Note que a palavra chave **podem**, é muito relevante: um evento pode estar dentro do cone de luz de outro evento mas não precisa ser influenciado por ele. A porção superior é o futuro de p e a porção inferior é o passado de p, o conjunto de eventos que podem ter tido alguma influência sobre p (enviado um sinal).

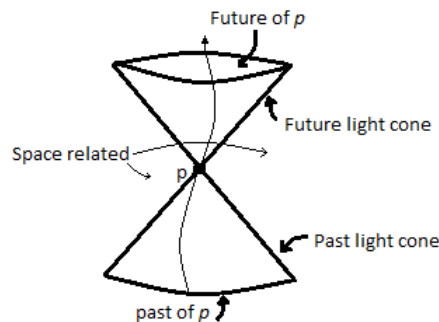



Figure 1.3: $ds^2 = 0$ é a equação da forma do cone de luz

Em seguida, vamos ver como o cone de luz se relaciona ao movimento. Uma partícula de massa m não pode se mover à velocidade da luz. Desta forma, de acordo com a perspectiva de qualquer partícula física, a trajetória dela deve estar inteiramente contida dentro do seu cone de luz. A tangente de qualquer trajetória contínua deve ter a sua inclinação menor do que 1 ($V < c$), portanto, esta condição se refletea no movimento possível de partículas no espaço-tempo. Podemos também interpretar que a causalidade local impede o movimento super-luminal de partículas, táquions, que hipoteticamente poderiam viajar acima da velocidade da luz. Nenhum táquion foi descoberto até hoje.

Se você observar a figura acima, irá ver uma trajetória contínua, que pode estar associada ao movimento de uma partícula naquele sistema de referência.

Isto tudo é muito interessante, mas os cones de luz têm alguma relação com a curvatura do espaço-tempo? De acordo com a Relatividade Geral,

a topologia do espaço-tempo é não trivial e curva. Esta curvatura muda a geometria e a direção do cone de luz. Em algumas circunstâncias, como no caso de buracos negros, os cones de luz vão sendo continuamente deformados e inclinados conforme nos aproximamos deles. Tais possibilidades bizarras levaram alguns pesquisadores a questionar se em Relatividade Geral poderiam existir trajetórias descritas por **curvas tipo-tempo fechadas** (CTCs).

CTCs são curvas tipo tempo onde o cone de luz vai virando até que em algum momento o observador possa voltar a um evento que pertencia ao seu passado, portanto, é uma genuína volta ao passado.

Esta possibilidade está em aberto, mas ao que tudo indica, um espaço-tempo fisicamente razoável é aquele que proíbe a existência de curvas tipo-tempo fechadas (proteção da cronologia como conjecturada por Hawking). As CTCs devem evidentemente violar a causalidade local. Além desta restrição topológica sobre a causalidade existem as condições de energia que impedem a existência de densidade de energia negativa no sistema de referência de algum observador. Tais condições serão estudadas adiante.

A figura abaixo mostra uma CTC:

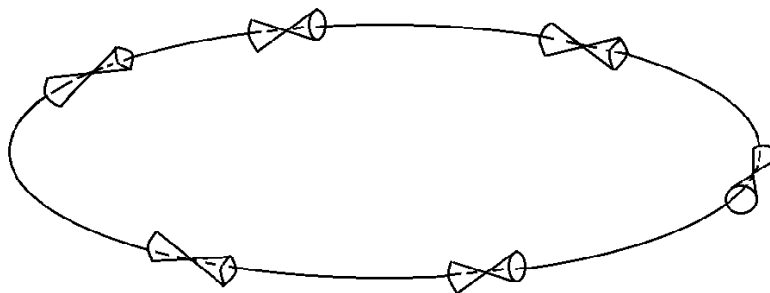



Figure 1.4: uma CTC é proibida em um espaço-tempo razoável

Uma observação importante aqui: o ponto p da figura 1.3 denota um evento no espaço-tempo. Entretanto, podemos associar a todo evento no espaço-tempo, um observador, naquela posição. Logo, para cada observador no espaço-tempo, há um cone de luz daquele observador, que descreve todos os eventos que podem ser influenciados por aquele observador, e portanto, o futuro causal do mesmo. A figura abaixo mostra o cones de luz de uma partícula com massa (deve-se mover dentro do cone de luz local) e o fóton (luz) que se move na borda do seu cone de luz:

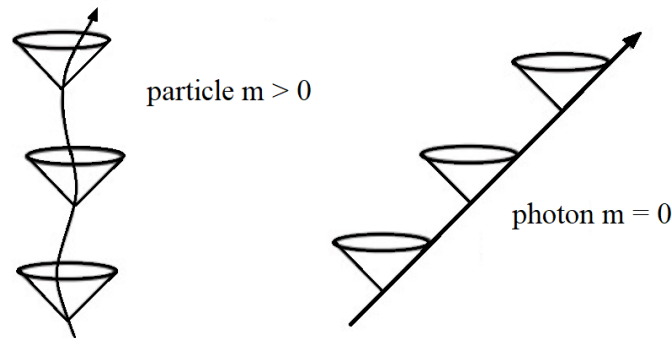



Figure 1.5: uma partícula move-se dentro do seu cone de luz e a luz na borda

Resumo: Todos os eventos fora do cone de luz de um dado observador são causalmente desconexos a partir dele. Então, o cone de luz determina a estrutura causal entre eventos e observadores no espaço-tempo e a geometria mostra como os cones de luz se comportam globalmente. Iremos voltar a discutir tais temas em detalhes ao estudarmos os buracos negros.

1.7 Eletrodinâmica em notação covariante

Na seção anterior escrevemos o vetor posição e o momento de uma partícula com rótulos: P^a ou P_a, com $a = 0, 1, 2, 3$.

Quando temos um rótulo superior nós o denominamos contravariante e quando o mesmo aparece embaixo, ele é chamado covariante. Esta notação tem a vantagem de deixar as expressões covariantes, isto é, elas não irão mudar de forma ao trocarmos um sistema de referência inercial por outro que também o seja, ou realizarmos apenas uma mudança de coordenadas retangulares para esféricas, por exemplo.

A necessidade da covariância é um princípio: iremos escrever as equações fundamentais da física em notação covariante, isto é, deixando explícito que a forma matemática das mesmas não depende da escolha do sistema de referência usado.

Aqui, nós observamos uma uniformidade no aparecimento dos índices. Por exemplo: $P^a = mU^a$. Aqui, há um índice contravariante no momento e o mesmo aparece no 4-vetor velocidade. Desta forma, a constante m, de proporcionalidade, não pode possuir índice vetoriais. Nós dizemos que m é um escalar.

Da mesma modo, a posição dos índices também deve ser uniforme: há um índice contravariante de um lado e outro contravariante do lado direito. Quando mudamos para outro sistema de referência iremos escrever:

$P'^a = mU'^a$, a 'linha' indica o novo sistema de referência S'. No capítulo 2 nós iremos nos aprofundar no estudo de tensores, que é essencial para a compreensão da Relatividade Geral.

Agora, vamos definir um 4-vetor A^a para a eletrodinâmica, ele é denominado potencial vetor ou 4-vetor potencial. Com este 4-vetor, podemos escrever as equações de Maxwell em termos dele. As componentes de A^a são definidas por:

$$A^a = \left(\Phi, \vec{A}\right) \tag{1.103}$$

onde: $a = 0, 1, 2, 3$.

A definição do 4-vetor A^a é feita de modo que o rotacional da parte espacial $a = 1, 2, 3$, corresponde ao campo magnético:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.104}$$

e o campo elétrico é definido pelo gradiente da componente $A^0 = \Phi$ menos a taxa de variação temporal da parte espacial de A^a:

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.105}$$

Antes de escrevermos as equações de Maxwell em termos do potencial vetor, é necessário definir o 4-vetor corrente: $J^a = (\rho, \vec{J})$: a componente temporal $a = 0$ corresponde à densidade de cargas elétricas e a parte espacial é o vetor densidade de corrente. No vácuo temos: $J^a = (0, \vec{0})$ como deve ser.

Finalmente, com as definições acima, ao inserirmos as expressões (1.35-36) nas equações de Maxweel, iremos obter as equações de onda para Φ e $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) = \vec{0} \tag{1.106}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1.107}$$

Estas são as equações de onda que descrevem a propagação de um distúrbio eletromagnético à velocidade da luz: $v = c$, no vácuo.

As soluções das equações acima são:

$$\vec{A}(X, t) = \vec{A}_0 cos\,(kX - \omega t) \tag{1.108}$$

e:

$$\Phi(X,t) = \Phi_0 cos\,(kX - \omega t) \tag{1.109}$$

considerando-se a propagação ao longo do eixo X (não há perda de generalidade devido à isotropia do espaço). Uma combinação linear de senos e cossenos também são soluções.

As funções acima são a expressão matemática concreta de um onda que se propaga com velocidade v dada por: $v = \frac{\omega}{k} = c$, na direção do eixo X. A relação: $\omega(k) = ck$ é chamada relação de dispersão da luz.

Para finalizar esta seção, vamos escrever as equações de Maxwell na notação covariante, ou seja, usando as componentes unificadas no espaço-tempo $a = 0,1,2,3$, em termos do 4-vetor A^a.

Vamos definir o tensor eletromagnético (ou tensor de Maxwell) como:

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i \tag{1.110}$$

onde: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$ e $\partial^i = \frac{\partial}{\partial X_i}$.

Com a definição acima, podemos escrever as equações de Maxwell na forma:

$$\partial_i F^{ij} = 4\pi J^j \tag{1.111}$$

correspondendo às eqs.(1.6a) e (1.6d) e também:

$$F_{[ij,k]} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial X^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial X^i} = 0 \tag{1.112}$$

que correspondem às demais equações.

Observe que este tensor é antisimétrico: $F_{ab} = -F_{ba}$, e $X^i = (X,Y,Z)$.

Na forma matricial o tensor F_{ab} tem as componentes:

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.113}$$

As equações (1.114) e (1.115) são covariantes, isto é, elas mantêm a mesma forma matemática sob uma transformação entre dois sistemas de referência inerciais S e S', com velocidade relativa $\vec{V}$ entre ambos.

Desta forma, no sistema de referência S' elas são escritas como: $\partial_{'i} F'^{ij} = 4\pi J'^j$ e $F_{'[ij,k]} = 0$.

A covariância que é agora manifesta nas equações de Maxwell deve ser alcançada em uma formulação mais abrangente para a gravidade. Desta vez, precisamos substituir a teoria da gravitação de Newton por uma teoria onde:

1) a propagação da influência gravitacional não é instantânea (lembre-se que o limite estabelecido pela velocidade da luz impede tal fenômeno e 2) as equações da gravitação sejam covariantes.

No próximo capítulo entramos em detalhes no assunto do cálculo tensorial, essencial para a construção da teoria da Relatividade Geral, e portanto, para a nossa compreensão dos Buracos Negros e a sua física.

Exercício 2: Escreva as componentes do tensor de Maxwell F_{ab} em termos dos campos elétrico e magnético.

Solução: veja a eq.(1.116) acima, na forma matricial.

Vamos calcular um dos elementos da matriz acima (considere $c = 1$):

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} \tag{1.114}$$

Mas observe que (eq.(1.108)):

$$-\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.115}$$

cuja componente-x é justamente e eq.(1.117) acima! Logo:

$$F_{01} = -E_x \tag{1.116}$$

Execute o mesmo procedimento para os demais!

Exercício 3: A partir da definição do tensor campo eletromagnético F_{ab} em termos de A^a e suas derivadas, escreva as 4 equações de Maxwell na forma covariante.

Solução:

Da equação:

$$\partial_a F^{ab} = 4\pi J^b \tag{1.117}$$

inserimos: $F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a$ e obtemos:

$$\partial_a \partial^a A^b - \partial_a \partial^b A^a = 4\pi J^b \tag{1.118}$$

Chapter 2

Cálculo Tensorial

2.1 Vetores, Tensores e 1-Formas

No capítulo prévio nós vimos como a Relatividade Especial introduz os conceitos de vetor com 4 componentes: a componente com rótulo 0 indicando a natureza temporal e as demais componentes, de 1 a 3, a natureza espacial das respectivas componentes. Esta unificação de espaço e tempo foi estimulada por H. Minkowski no início do século passado. Neste, nós iremos nos aprofundar nos conceitos e nas ferramentas matemáticas que são necessárias no estudo de espaço-tempos mais gerais.

Um **vetor** expresso em um sistema retangular de coordenadas pode ser escrito como:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{2.1}$$

Acima, nós o expressamos em um sistema de coordenadas Cartesiano, mas o mesmo vetor pode ser escrito em outros sistemas de coordenadas:

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi} \tag{2.2}$$

Note que um vetor é uma entidade geométrica que existe independentemente do sistema de coordenadas usado, mas as suas componentes dependem da escolha do mesmo.

Em geral temos: $(A_x \neq A_r)$ e assim por diante.

Agora, a questão que vem em nossa mente é: existe alguma forma de transformarmos ou relacionarmos as velhas componentes em novas componentes, em outro sistema de coordenadas?

A resposta é sim: nós podemos transformar as velhas componentes de um vetor em outras componentes, relacionadas a outro sistema de coordenadas.

Este procedimento define o que é conhecido por transformação (ou mudança) de coordenadas.

2.2 A dependência das componentes com a base

Para expressarmos as relações vetoriais entre as componentes, é necessária a introdução de rótulos (ou índices) que indiquem a posição relativa da componente do vetor, que aponta, digamos assim, em uma dada direção. Em 3D, esta notção faz uso de rótulos que vão de 1 a 3, e em 4D iremos usar rótulos que vão de 0 a 3. Veja o exemplo de um vetor e suas componentes em 3D:

$$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \tag{2.3}$$

no sistema de coordenadas Cartesiano, e:

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \theta, \phi) \tag{2.4}$$

no sistema de coordenadas esféricas.

O vetor, geometricamente falando, é o mesmo, mas ele é representado de modo diferente (as suas componentes) quando mudamos de uma base para outra: uma base que descreve o sistema de coordenadas Cartesiano e uma base que descreve o sistema de coordenadas esféricas, no caso do exemplo acima. Adiante, iremos estudar como calcular as transformações entre os sistemas de coordenadas.

As derivadas parciais exigem uma notação especial para elas. Iremos indicá-las como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f \tag{2.5}$$

ou:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \to \partial_a \tag{2.6}$$

A colocação de rótulos $a = 0, 1, 2, 3$ para as componentes dos 4-vetores é muito importante para escrevermos equações diferenciais vetoriais e tensoriais que apresentem de modo manifesto a covariância das mesmas. Isto é essencial, pois podemos estar seguros de que as soluções destas equações são consistentes e podem ser transformadas adequadamente para outros sistemas de coordenadas ou sistemas de referência. Vamos começar o nosso estudo de cada objeto geométrico.

2.3 4-vetores e a convenção de Soma de Einstein

4-vetores são objetos geométricos com 4 componentes independentes. Podemos rotular as suas componentes como:

$$A^a = (A^0, A^1, A^2, A^3) \tag{2.7}$$

Exemplo 1: 4-vetor posição de um evento ou partícula, em dois sistemas de coordenadas diferentes, Cartesiano e Esférico:

$$X^a = (ct, X, Y, Z), X^{a'} = (ct, r, \theta, \phi) \tag{2.8}$$

No entanto, existem objetos geométricos que possuem mais componentes (um exemplo físico é o tensor de Maxwell: F_{ab}). O objeto geométrico abaixo possui dois rótulos, ou índices, cada um deles indo de 0 a 3, logo, ele possui 16 componentes (mesmo que o espaço-tempo subjacente seja 4-dimensional):

$$T_{ab} \tag{2.9}$$

Desta forma, ele pode ser representado por uma matriz (ele não é uma matriz, mas podemos arranjar as componentes em ordem sequencial, de modo que uma matriz pode representá-las adequadamente):

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Observe que a posição relativa dos índices é importante: o primeiro rótulo: a indica a linha e o segundo rótulo: b indica a coluna. Outra observação importante: os objetos A^a e A_a não são o mesmo, embora exista uma relação entre eles, a qual iremos explorar mais adiante.

Conforme você estiver trabalhando com expressões mais complexas, será muito comum encontrar algumas delas com muitos índices em cima e embaixo e combinações: produtos e somas.

Neste momento, surge a convenção de **Soma de Einstein**, que é um atalho para representar expressões que somem índices iguais. Quando o mesmo índice aparece em cima e embaixo, em uma mesma expressão, ela indica a soma sobre os mesmos, e o sinal de soma pode ser suprimido (uma soma é implícita sobre os mesmos):

2.3.1 Convenção da Soma de Einstein:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(A_iB^i\right) \to A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 = A_iB^i \tag{2.11}$$

Índices que são somados são chamados de **mudos**, e eles podem ser trocados por qualquer outro rótulo, se necessário, mas sempre evitando-se a repetição com a existência de outro rótulo de mesmo nome (esta colisão de nomes deve ser evitada).

Exemplo 2: Na expressão abaixo, como a é mudo, ele pode ser trocado por qualquer outro rótulo, por exemplo j:

$$A_aB^{ad} = A_jB^{jd} \tag{2.12}$$

O índice a é mudo e o índice d é **livre**.

Os índices livres devem aparecer na mesma posição relativa (não podem mudar de posição) e não podem ter o seu nome trocado (a menos que você mude de ambos os lados usando-se o mesmo nome). Além disso, se você escolher trocar o nome do índice livre (em ambos os lados), esta mudança não pode colidir com o nome do índice mudo.

Exemplo 3: A expressão:

$$A_aB^{ac} = A_aB^a_c \tag{2.13}$$

não faz sentido, pois a posição relativa de c não é a mesma em cada lado da equação.

A expressão correta deve ser: $A_aB^{ac} = A_aB^{ac}$. Finalmente, se você deseja trocar o nome de c, você poderá fazê-lo, desde que a troca seja feita em ambos os lados.

Exemplo 4: Você possui a seguinte expressão:

$$\left(F^{ac}{}_a = U^a{}_aV^c\right) \to \left(F^{ad}{}_a = U^a{}_aV^d\right)$$

Note que a troca de c por d foi uniforme e na mesma posição, e observe também que o rótulo a é somado no mesmo objeto U, pois ele aparece repetido.

2.4 Tensores contravariantes and covariantes

De acordo com a seção anterior, vimos os exemplos de objetos com um índice (em cima ou embaixo) de natureza vetorial e o exemplo do tensor de Maxwell F_{ab}, com dois índices. Mas o que são tensores?

Tensores são objetos geométricos invariantes sob transformações de coordenadas, mas cujas componentes se transformam de um modo especificado pelas derivadas parciais entre as coordenadas de um sistema com relação a outro sistema, cuja transformação é linear nestas últimas.

Colocado em termos matemáticos: se A é um tensor cujas componentes em S são dadas por: A^a, as suas componentes no sistema de coordenadas S' são dadas por:

$$A^{a'} = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^b} \right) A^b \tag{2.14}$$

Dizemos de modo alternativo que as componentes de A^a se transformam de acordo com a regra acima. O tensor A^a na eq.(2.12) é chamado **contravariante** visto que as suas componentes têm índice em cima.

Por sua vez, um **tensor covariante** tem as suas componentes embaixo, e se transformam de acordo com regra:

$$A_{a'} = \left(\frac{\partial X^b}{\partial X^{a'}} \right) A_b \tag{2.15}$$

Um ponto importante aqui: $X^{a'}$ é a representação das coordenadas do sistema S' e devem ser visualizadas como funções contínuas, diferenciáveis e inversíveis, das coordenadas do sistema S, isto é, elas são funções na forma: $X^{a'} = X^{a'}(X^b)$. Por exemplo: $X(r, \theta) = rcos(\theta)$ é a transformação entre a coordenada Cartesiana X como função das coordenadas r e θ do sistema de coordenadas polar S.

É muito comum representar o coeficiente de transformação de (2.12) ou (2.13) em uma das formas abaixo:

$$\begin{cases} \Lambda^{a'}{}_b = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^b} \right) \\ \Lambda^b{}_{a'} = \left(\frac{\partial X^b}{\partial X^{a'}} \right) \end{cases} \tag{2.16}$$

Exemplo 5: Considere um tensor no plano 2D, A^a, no sistema de coordenadas Cartesiano, onde $a = 0, 1$. No plano, a transformação entre o sistema de coordenadas Cartesiano e o Polar é definida pelo conjunto de transformações:

$$X = rcos(\theta) \text{ e } Y = rsin(\theta) \tag{2.17}$$

Então, o sistema de coordenadas S é dado por: (X, Y) e o mesmo ponto no sistema de coordenadas S', polar, é definido por: (r, θ).

Pergunta-se: dado um vetor de coordenadas: A^a no sistema Cartesiano, sob as transformações acima, quais serão as suas coordenadas $A^{a'}$ no sistema polar?

Solução:

Note que estamos trabalhando com um tensor com apenas duas componentes, $a^{'} = 0, 1$. A transformação entre as componentes é:

$$A^{a'} = \frac{\partial X^{a'}}{\partial X^b} A^b = \frac{\partial X^{a'}}{\partial X^0} A^0 + \frac{\partial X^{a'}}{\partial X^1} A^1 \tag{2.18}$$

Pois abrimos a expressão, usando a convenção da **Soma de Einstein**. Agora, temos duas expressões diferentes, uma para $a^{'} = 0$ e outra para $a^{'} = 1$, vamos trabalhar com cada uma em separado.

$$A^{0'} = \frac{\partial X^{0'}}{\partial X^0} A^0 + \frac{\partial X^{0'}}{\partial X^1} A^1 \tag{2.19a}$$

$$A^{1'} = \frac{\partial X^{1'}}{\partial X^0} A^0 + \frac{\partial X^{1'}}{\partial X^1} A^1 \tag{2.19b}$$

Agora, temos que usar as transformações dadas na eq.(2.17). Identique os rótulos: $X^0 = X, X^1 = Y$ e $X^{0'} = r, X^{1'} = \theta$. Desta forma, as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial X^{0'}}{\partial X^0} = \frac{1}{cos(\theta)} \tag{2.20a}$$

$$\frac{\partial X^{0'}}{\partial X^1} = \frac{1}{sin(\theta)} \tag{2.20b}$$

$$\frac{\partial X^{1'}}{\partial X^0} = \frac{-1}{rsin(\theta)} \tag{2.20c}$$

$$\frac{\partial X^{1'}}{\partial X^1} = \frac{1}{rcos(\theta)} \tag{2.20d}$$

Inserindo acima, obtém-se as relações entre as componentes do **tensor contravariante** A quando mudamos do sistema de coordenadas Cartesiano para o Polar:

$$A^{0'} = \frac{A^0}{cos(\theta)} + \frac{A^1}{sin(\theta)} \tag{2.21a}$$

$$A^{1'} = -\frac{A^0}{rsin(\theta)} + \frac{A^1}{rcos(\theta)} \tag{2.21b}$$

Resumindo: o tensor A escreve-se como: $A^{'} = (A^{0'}, A^{1'})$, de acordo com $S^{'}$ e escreve-se como: $A = (A^0, A^1)$ de acordo com S, mas guardam entre si as

relações entre as componentes acima, quando escolhemos S como o sistema Cartesiano e $S^{'}$ como o Polar.

Este exemplo serviu para que o leitor possa ter uma ideia mais clara da mecânica envolvida nas transformações, mas iremos nos dedicar às transformações de coordenadas ainda em mais detalhes, nas próximas seções. Vamos continuar com a nossa classificação dos tipos de tensores.

Outros tipos de tensores com mais índices podem ser definidos, por exemplo um tensor contravariante de ordem 2, terá dois índices na posição superior e se transforma como:

$$T^{a'b'} = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^{c}}\right)\left(\frac{\partial X^{b'}}{\partial X^{d}}\right)T^{cd} \tag{2.22}$$

Um tensor covariante de segunda ordem tem as suas componentes transformadas de acordo com:

$$T_{a'b'} = \left(\frac{\partial X^{c}}{\partial X^{a'}}\right)\left(\frac{\partial X^{d}}{\partial X^{b'}}\right)T_{cd} \tag{2.23}$$

e, podemos ter um tensor misto, com uma componente contravariante e outra covariante, por exemplo:

$$T^{a'}{}_{b'} = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^{c}}\right)\left(\frac{\partial X^{d}}{\partial X^{b'}}\right)T^{c}{}_{d} \tag{2.24}$$

Antes de finalizar esta seção, observe que a regra da cadeia impõe a seguinte fórmula:

$$\left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^{b}}\right)\left(\frac{\partial X^{c}}{\partial X^{a'}}\right) = \delta^{c}{}_{b} \tag{2.25}$$

onde:

$$\delta^{c}{}_{b} = \begin{cases} 1, c = b \\ 0, c \neq b \end{cases} \tag{2.26}$$

Para finalizar esta seção da definição dos tensores, note que o tensor mais básico é dado por aquele que não possui índices, quer sejam covariantes ou contra. Ele é do tipo $(0,0)$, e denota a função escalar, ou escalar simplesmente, cuja regra de transformação é:

$$\Phi^{'}(X^{'}) = \Phi(X) \tag{2.27}$$

Exercício 4: Considere a transformação: $X^{a'} = \Lambda^{a'}{}_{b}X^{b}$ onde X e $X^{'}$ estão relacionadas pelas transformações de Lorentz:

$$X' = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$T' = \frac{T - VX/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$Y' = Y$$
$$Z' = Z$$

Prove que a forma matricial de $\Lambda^{a'}{}_b$ é dada por:

$$\Lambda^{a'}{}_b = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Onde o fator de Lorentz é dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.30}$$

e: $X^a = (cT, X, Y, Z)$, $X^{a'} = (cT', X', Y', Z')$ com $\beta = \frac{V}{c}$.
Solução:
Escreva as transformações de Lorentz como:

$$X' = \gamma\,(X - \beta cT) = \gamma X - \beta\gamma cT$$
$$cT' = \gamma(cT - \beta X) = \gamma cT - \gamma\beta X$$
$$Y' = Y$$
$$Z' = Z$$

Agora, abra a expressão: $X^{a'} = \Lambda^{a'}{}_b X^b$, considerando a soma de Einstein sobre b, para cada $a' = 0, 1, 2, 3$. Inicie com $a' = 0$:

$$X^{0'} = \Lambda^{0'}{}_0 X^0 + \Lambda^{0'}{}_1 X^1 + \Lambda^{0'}{}_2 X^2 + \Lambda^{0'}{}_3 X^3 \tag{2.32}$$

Comparando com a segunda linha acima, obtém-se:

$$\Lambda^{0'}{}_0 = \gamma,\ \Lambda^{0'}{}_1 = -\beta\gamma,\ \Lambda^{0'}{}_2 = 0 \text{ e: } \Lambda^{0'}{}_3 = 0 \tag{2.33}$$

Realizando o mesmo procedimento acima, com a primeira linha:

$$X^{1'} = \Lambda^{1'}{}_0 X^0 + \Lambda^{1'}{}_1 X^1 + \Lambda^{1'}{}_2 X^2 + \Lambda^{1'}{}_3 X^3 \tag{2.34}$$

a partir do qual temos, imediatamente:

$$\Lambda^{1'}{}_0 = -\beta\gamma,\ \Lambda^{1'}{}_1 = \gamma,\ \Lambda^{1'}{}_2 = 0 \text{ e: } \Lambda^{1'}{}_3 = 0 \tag{2.35}$$

Finalmente, das transformações: $X^{2'} = Y' = Y = X^2$ e $X^{3'} = Z' = Z = X^3$, temos:

$$\Lambda^{2'}{}_2 = 1 \text{ e: } \Lambda^{3'}{}_3 = 1 \tag{2.36}$$

e as demais componentes são nulas, desta forma chega-se facilmente à matriz dada pela eq.(2.16).

Tenha em mente a seguinte observação sobre tensores: o coeficiente que determina a transformação entre as componentes de um tensor, sempre é dado pela derivada parcial das coordenadas de um sistema relativa às coordenadas do outro. Este coeficiente aparece de modo linear e homogêneo: elevado à primeira potência e sem termos de sobra. Qualquer outro tipo de transformação que não obedeça a tais restrições não define um tensor. Nas próximas seções teremos contato com tensores com mais componentes e iremos aperfeiçoar as nossas definições.

2.5 Vetores tangentes, 1-formas e a base coordenada

Da álgebra linear básica você deve estar lembrado que um vetor pode ser expresso como a combinação linear das suas componentes na direção dos vetores da base. O mesmo ocorre para os tensores.

Iremos frequentemente rotular **vetores de base** com a notação: e_a. Usando a convenção de soma de Einstein, um vetor V pode ser escrito em termos de alguma base como:

$$V = V^a e_a \tag{2.37}$$

Em um dado sistema de coordenadas, os vetores da base são tangentes às linhas coordenadas. Portanto, nós definimos os vetores da base como:

$$e_a = \frac{\partial}{\partial X^a} = \partial_a \tag{2.38}$$

Este tipo de base é chamada **base coordenada**, e ela nos permite imaginar um vetor como uma aplicação (operador) que mapeia uma função em uma nova função, relacionada a sua derivada. Escolhendo-se uma função $g(X)$ teremos então:

$$Vg = (V^a e_a)\, g = V^a\,(\partial_a g) \tag{2.39}$$

onde: $g = g(X)$ é uma função diferenciável.

A representação do vetor, acima escolhida, leva o nome de **contravariante**, ou em outros termos V é um vetor contravariante.

Mas, podemos expressá-lo em termos das coordenadas covariantes. Este tipo de vetor é chamado **1-forma**. Do mesmo modo, podemos expandi-lo em termos de uma base ω^a:

$$\tilde{V} = V_a \omega^a \tag{2.40}$$

onde ω^a são os elementos da base da 1-forma, e a base em si é indicada pela coleção dos elementos: $\{\omega^a\}$. Desta forma, temos aqui as duas bases: $\{e_a\}$ e a base dual $\{\omega^a\}$.

Nós dizemos que $\tilde{V}$ é o dual de V e vice-versa. Estes objetos são na verdade o mesmo objeto, mas escritos em diferentes representações. Adiante, iremos ver como passar de uma representação a outra usando a **métrica** g_{ab}.

Dando prosseguimento ao nosso desenvolvimento, note que os elementos da base e da base dual, satisfazem à seguinte propriedade:

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b \tag{2.41}$$

onde: $\delta^a_b = 1$ quando $a = b$ e $\delta^a_b = 0$ de outro modo.

A base das 1-formas admite uma representação muito importante (não é a única) e que leva o nome de **representação coordenada**, em cujo caso escrevemos:

$$\omega^a = dX^a \tag{2.42}$$

ela é a dual de ∂_a, a representação coordenada da base dos vetores.

Agora, para relacionarmos as 1-formas com os vetores, precisamos saber qual é o resultado da aplicação de uma 1-forma.

Uma 1-forma arbitrária σ mapeia um vetor em um número, através do **produto escalar**:

$$\sigma.Vf = (\sigma_a \omega^a)\big(V^b e_b\big) f = \sigma_a V^b\,(\omega^a e_b)\, f = \sigma_a V^b \delta^a_b f = \sigma_a V^a f \tag{2.43}$$

para qualquer função diferenciável f, e usamos a propriedade (2.20) na penúltima passagem.

Do mesmo modo que 1-formas mapeiam vetores em números reais, a inversa naturalmente é verdadeira: vetores são objetos geométricos que mapeiam

1-formas em númenros reais, através do produto escalar. Esta ideia pode ser generalizada para um número arbitrário de 1-formas e vetores, e ela é usada para construírmos de modo natural o conceito de tensor.

Definição: tensores são aplicações que tomam p 1-formas e q vetores e os associa a números reais, usando para isto o produto escalar.

Se as componentes de um tensor 'apontam' na direção das componentes de base $\{e_a\}$ e $\{\omega^b\}$, então, o tensor pode ser escrito como:

$$T = T^a{}_b e_a \omega^b \tag{2.44}$$

onde as componentes se referem às bases $\{e_a\}$ e $\{\omega^b\}$, isto é: mudando-se as bases, as componentes também mudam. As componentes indicam o quanto elas 'apontam', proporcionalmente em cada direção no espaço das componentes. Nota-se que eu coloquei em aspas, pois este apontamento não é visualizável em si, mas guarda a analogia que é herdada dos espaços Euclidianos, onde definimos vetores e suas componentes como projeções ao longo dos eixos coordenados.

2.5.1 Tipo tensorial

O tensor $T^a{}_b$ acima é do tipo $(1, 1)$, pois ele tem um índice superior e um índice inferior (contravariante de ordem 1 e covariante de ordem 1). Um tensor T_a é do tipo: $(0, 1)$: ou seja, covariante e um tensor T^a é do tipo $(1, 0)$, ou seja, contravariante.

As quantidades: $T^a{}_b$ são as componentes do tensor T na base: $\{e_a \omega^b\}$, e assim por diante, e são números reais.

É usual denotar: $e_a \omega^b$ como: $e_a \otimes \omega^b$, onde a operação: $\otimes$ denota um 'produto' dos objetos geométricos, pois lembre-se: eles não são números (são objetos geométricos).

Por outro lado, as componentes $T^a{}_b$ dos tensores são números reais por si só. Na verdade, no caso de estendermos o tensor para um campo tensorial, as componentes tornam-se campos, ou seja funções do ponto (ultimamente é isto que de fato ocorre).

A exata representação da eq.(2.44) lê-se como:

$$T = (T^a{}_b)\, e_a \otimes \omega^b \tag{2.45}$$

Por simplicidade, omitiremos $\otimes$ a partir de agora, uma vez que conhecemos a natureza do seu contexto.

Para fixar as ideias, vamos apresentar alguns exemplos de representações:

1) Se T é do tipo $(1, 0)$ ele é representado como:

$$T = T^a e_a \tag{2.46}$$

2) Se T é do tipo $(0,1)$ ele é representado como:

$$T = T_a \omega^a \tag{2.47}$$

3) Se T é do tipo $(2,1)$ ele é representado como:

$$T = \left(T^{ab}{}_c\right) e_a \otimes e_b \otimes \omega^c \tag{2.48}$$

4) Se T é do tipo $(1,2)$ ele é representado como:

$$T = \left(T^a{}_{bc}\right) e_a \otimes \omega^b \otimes \omega^c \tag{2.49}$$

ou omitem-se os símbolos $\otimes$ pois já estão subentendidos.

Questão: um tensor do tipo $(1,2)$ pode ser representado como uma matriz? Qual é o número de componentes se os ídices tensoriais vão de 0 a 3? Pode-se generalizar tal resultado?

Solução:

As suas componentes podem ser dispostas como matrizes, mas desta vez temos que fixar (por exemplo o rótulo contravariante) uma delas para cada matriz. Neste caso, iremos obter 4 matrizes diferentes. Vamos dar um exemplo, sejam as componentes: T^a_{bc}. Fixando-se a iremos obter 4 matrizes: $T^0{}_{bc}, T^1{}_{bc}, T^2{}_{bc}, T^3{}_{bc}$.

O número de componentes é: $4 * 4 * 4 = 64$ pois cada índice vai de 0 a 3 e temos um rótulo contravariante e dois rótulos covariantes. Se o tensor tiver simetrias, o número de componentes reais independentes pode ser bem menor. Exemplo: o tensor métrico é do tipo $(0,2)$, ele tem 16 componentes, mas devido à simetria, 6 delas repetem, logo, o número de componentes independentes é 10.

O resultado é generalizado para: $N = D^{contra+cova}$, onde: D é a dimensão (nestes exemplos $D = 4$) e o expoente soma o número de componentes contravariantes + número de componentes covariantes. Se houver simetrias, esse número é reduzido, de modo análogo ao que ocorre com o tensor métrico.

Para obtermos as componentes, temos que aplicar o objeto geométrico sobre os elementos das bases (base e base dual dependendo de cada caso), usando as propriedades: $\omega_a(e^b) = \delta_a{}^b$ ou $e_a(\omega^b) = \delta_a{}^b$.

Componentes:

Por exemplo, as componentes do tensor covariante $(0,2)$, g são obtidas aplicando-se:

$$g(e_a, e_b) = g_{cd}\omega^c \otimes \omega^d (e_a, e_b) = g_{cd}\delta^c{}_a \delta^d{}_b = g_{ab} \tag{2.50}$$

Não se esqueça de: $g_{ac}\delta^c{}_b = g_{ab}$, pois δ é igual a zero quando $c \neq b$.

Iremos ver como realizar este cálculo um pouco mais adiante.

Resumindo: os objetos geométricos e_a e ω^b indicam 'direções' onde as componentes do tensor T apontam. A partir da perspectiva acima, nós percebemos que as componentes são base-dependentes, com seria de se esperar. Se você mudar a base, as componentes mudam de acordo com a nova representação. A isto chamamos de transformação ou mudança de coordenadas, tópico a ser explorado na próxima seção.

2.6 Mudança de coordenadas

Em Relatividade nós temos dois tipos de transformações: uma na qual o sistema de referência é relacionado a outro, ou simplesmente você muda o tipo de sistema de coordenadas (retangulares para polares, ou esféricas, por exemplo). Ambas as transformações são representadas do mesmo modo:

$$\Lambda^{b'}{}_a = \left(\frac{\partial X^{b'}}{\partial X^a}\right) \tag{2.51}$$

onde nós podemos mudar de S a S', de acordo com as transformações definidas nas derivadas parciais das coordenadas novas com relação às velhas.

Por outro lado, os vetores de base são transformados como:

$$e_{a'} = \Lambda^b{}_{a'} e_b = \Lambda^0{}_{a'} e_0 + \Lambda^1{}_{a'} e_1 + \Lambda^2{}_{a'} e_2 + \Lambda^3{}_{a'} e_3 \tag{2.52}$$

Onde:

$$\Lambda^b{}_{a'} = \left(\frac{\partial X^b}{\partial X^{a'}}\right) \tag{2.53}$$

Portanto, a base velha está relacionada à nova: nós podemos expandi-la em termos da outra. Uma das bases tem o rótulo 'linha' $(U^{a'})$, a outra já não o tem.

Exemplo 1: Determine a matriz da transformação $\Lambda^{a'}{}_b$ considerando a transformação de base entre as coordenadas retangulares e as polares.

Solução:

A transformação entre as coordenadas retangulares e as polares, no plano, são dadas pelas equações:

$$\begin{cases} X = rcos(\theta) \\ Y = rsin(\theta) \end{cases}$$

A base do sistema retangular é dada por: (e_x, e_y) e a nova base é: (e_r, e_θ).

Teremos então:

$$\begin{cases} e_r = \Lambda^x{}_r e_x + \Lambda^y{}_r e_y \\ e_\theta = \Lambda^x{}_\theta e_x + \Lambda^y{}_\theta e_y \end{cases} \tag{2.54}$$

Agora, nós temos que calcular:

$$\Lambda^x{}_r = \frac{\partial X}{\partial r} = cos(\theta) \tag{2.55}$$

e

$$\Lambda^y{}_r = \frac{\partial Y}{\partial r} = sin(\theta) \tag{2.56}$$

Portanto:

$$e_r = cos(\theta) e_x + sin(\theta) e_y \tag{2.57}$$

Do mesmo modo é fácil calcular e_θ:

$$e_\theta = -rsin(\theta) e_x + rcos(\theta) e_y \tag{2.58}$$

Dos resultados acima a matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas S', retangular e o polar S é:

$$\Lambda^{a'}{}_b = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -rsin(\theta) \\ sin(\theta) & rcos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

As componentes dos vetores se transformam de modo oposto: contravariantes!

As componentes dos vetores aparecem com índices superiores, e elas se transformam de acordo com:

$$U^{a'} = \Lambda^{a'}{}_b U^b = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^b} \right) U^b \tag{2.60a}$$

$$e_{a'} = \Lambda^b{}_{a'} e_b = \left(\frac{\partial X^b}{\partial X^{a'}} \right) e_b \tag{2.60b}$$

Note que as componentes de um vetor se transformam do modo oposto se comparado com a base. Esta é a origem da denominação contravariante.

Agora, é importante notar que: as componentes se transformam linearmente sob a mudança de coordenadas, embora o vetor em si permaneça imutável. Para verificá-lo, observe a transformação completa:

$$U^{'} = U^{a'} e_{a'} = \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^{b}}\right) U^{b} \left(\frac{\partial X^{c}}{\partial X^{a'}}\right) e_{c} = \tag{2.61}$$
$$= \left(\frac{\partial X^{a'}}{\partial X^{b}}\right) \left(\frac{\partial X^{c}}{\partial X^{a'}}\right) U^{b} e_{c} =$$
$$= \delta^{c}{}_{b} U^{b} e_{c} = U^{c} e_{c} = U$$

Por outro lado, a base das 1-formas se transforma como:

$$\omega^{a'} = \Lambda^{a'}{}_{b} \omega^{b} \tag{2.62}$$

e as componentes do vetor covariante devem se transformar como:

$$V_{a} = \Lambda_{a}{}^{b'} V_{b'} \tag{2.63}$$

E, pelo mesmo motivo, um vetor covariante (1-forma) não muda sob transformação de coordenadas, apenas as suas componentes. Para finalizar, observe que, sob uma transformação de coordenadas geral, as componentes dos tensores adquirem uma matriz de transformação para cada componente. Por exemplo:

$$T^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_{c} \Lambda^{d}{}_{b'} T^{c}{}_{d}$$

Exercício 5: Escreva as transformações que relacionam as componentes de um tensor do tipo:
a) (0,1)
b) (1,0)
c) (1,1)
d) (2,1)
Mostre em cada caso que o objeto geométrico correspondente permaneceu invariante sob as mudanças de coordenadas de S para $S^{'}$.
Solução:
a) (0,1) é um tensor covariante de ordem 1, logo ele se transforma como:

$$T_{a'} = \Lambda_{a'}{}^{d} T_{d}$$

onde o índice d é somado.
b) (1,0) é um tensor contravariante de ordem 1, logo:

$$T^{a'} = \Lambda^{a'}{}_{d} T^{d}$$

c) (1,1) é um tensor contravariante e covariante de ordem 1, logo:

$$T^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_c \Lambda^d{}_{b'} T^c{}_d$$

onde os índices c e d são somados.

d) (2,1) é um tensor contravariante de ordem 2 e covariante de ordem 1, logo:

$$T^{a'e'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_c \Lambda^d{}_{b'} \Lambda^{e'}{}_f T^{cf}{}_d$$

Vamos mostrar apenas para o caso (0,1) pois os demais são análogos:

$$T = T_a e^a = \Lambda_a{}^{b'} T_{b'} \Lambda^a{}_{f'} e^{f'} = \Lambda_a{}^{b'} \Lambda^a{}_{f'} T_{b'} e^{f'} = T_{f'} e^{f'} = T_{a'} e^{a'} \tag{2.64}$$

pois vale: $\Lambda_a{}^{b'} \Lambda^a{}_{f'} = \delta^{b'}_{f'}$.

2.7 Métrica: o fundamento da Relatividade!

2.7.1 Elemento de linha de um espaço-tempo vazio

A métrica é um dos principais elementos usados para estabelecer relações geométricas e físicas no espaço-tempo. Com ela, nós podemos medir distâncias e intervalos de tempo na variedade que é o espaço-tempo. A Relatividade Geral considera o espaço-tempo como sendo uma variedade munida de métrica e conexão e com dimensão D=4 (generalizações dos resultados para $D > 4$ são possíveis, mas não iremos tratá-las aqui). Mas, o conceito de métrica surge um pouco antes, mesmo na Relatividade Especial. O espaço-tempo livre de matéria e energia é plano e a métrica η_{ab} é definida a partir do elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.65}$$

Este elemento de linha é conhecido como elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski, ou métrica de Minkowski, e foi escrita em coordenadas Cartesianas.

A situação relativa do sinal negativo pode ser mudada de acordo com outras convenções:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.66}$$

Nós iremos usar a primeira convenção neste livro, onde a assinatura da métrica será: $(-, +, +, +)$, ou equivalentemente, dizemos que a assinatura

da métrica é +2. Nas próximas seções iremos escrever a expressão matricial das componentes de η_{ab}.

2.7.2 Tipos de 4-vetores: tipo-tempo, espaço e nulo

Usando a convenção da assinatura positiva (assi(η)=+2), podemos definir os 4-vetores em três tipos:

$$\begin{cases} \textbf{tipo-tempo: } U_a U^a < 0 \\ \textbf{tipo-nulo: } U_a U^a = 0 \\ \textbf{tipo-espaço: } U_a U^a > 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

Um 4-vetor tipo-tempo tem produto escalar negativo, isto quer dizer que ele pode ser associado a processos físicos causais (não viola a causalidade). **Exemplo:** o 4-vetor U^a que descreve a 4-velocidade de uma partícula, deve ser tipo-tempo, pois não existem partículas super-luminais ($V > c$).

Partículas com massa de repouso zero (fóton e gráviton) movem-se à velocidade da luz, logo, o seu 4-vetor velocidade é nulo. Um vetor tangente à superfície de um buraco negro é um vetor nulo, pois o horizonte de eventos é uma superfície nula, conforme iremos ver mais adiante.

2.7.3 Cones de luz na Relatividade Geral

Todas as partículas com massa devem se mover dentro do seu cone de luz: logo, o 4-vetor velocidade: U^a deve ser tipo-tempo. A luz se move na fronteira do cone de luz, por definição. Por outro lado, é fácil ver que a trajetória da luz, no espaço-tempo é descrita por $ds^2 = 0$.

Isto se deve a: $0 = -c^2dt^2 - dr^2 \to \frac{dr}{dt} = c$.

Além disso, mesmo sob uma mudança na geometria e sistema de coordenadas, a luz se move de modo que todo intervalo que ela percorre satisfaz: $ds^2 = 0$, independente da geometria e da métrica escolhida. Nós iremos explorar mais adiante esta propriedade ao estudarmos cones de luz em torno de objetos compactos.

A figura abaixo mostra a situação comparativa da estrutura causal do espaço-tempo antes da Relatividade Especial e após o seu advento. Note que, na teoria Newtoniana, o futuro de um observador arbitrário era absoluto, e quaisquer eventos do seu futuro, poderiam por ele ser influenciados. Por outro lado, de acordo com a Relatividade Especial, nem todos os eventos pertencem ao futuro causal de um observador qualquer. E, nem todos os eventos podem tê-lo influenciado: apenas uma porção de eventos do espaço-tempo podem influenciá-lo: a porção finita do passado causal a ele.

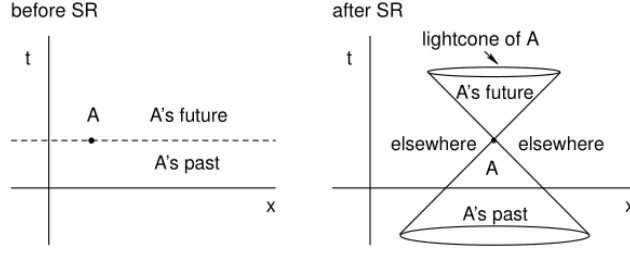



Figure 2.1: o cone de luz de um observador em A

Um evento B, fora do cone de luz de um outro evento A, não pode ser afetado por A (B está no futuro relativo de A). Mas, B pode estar dentro do cone de luz de outro evento, digamos C, e pode existir alguma relação causal entre eles, pelo menos em princípio.

A projeção do cone de luz no espaço é um disco de raio R cujo raio aumenta à taxa constante com o tempo (velocidade da luz). Lembre-se que esta projeção, nada mais é do que a aparência da frente de onda de luz que é esférica, no espaço 3D.

Finalmente, a forma do elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski, em coordenadas retangulares, é:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.68}$$

Mas, podemos expressá-la em coordenadas esféricas como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{2.69}$$

Ou em cilíndricas como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \tag{2.70}$$

Todos os elementos de linha acima se referem ao mesmo espaço-tempo, mas escrito em diferentes coordenadas. Esta invariância (difeomorfismo) não acontece apenas quando o espaço-tempo é destituído de matéria e energia: é uma propriedade muito importante da estrutura das equações de campo da Relatividade Geral, e que dificulta em muito a análise e interpretação das métricas que são soluções das equações de Einstein.

2.7.4 A métrica do espaço-tempo curvo

Geralmente, nós escrevemos o elemento de linha como:

$$ds^2 = g_{ab}(X) dX^a dX^b \tag{2.71}$$

onde: $g_{ab}(X)$ são as componentes de um tensor de segunda ordem (covariante) chamado métrica.

A métrica contém informação importante sobre as propriedades globais do espaço-tempo (se é curvo ou não). Entretanto, não é óbvio decidir se um dado espaço-tempo é curvo, olhando apenas a métrica. A métrica do espaço-tempo plano em coordenadas esféricas pode levar a pensar que o mesmo é curvo, mas não é. Nas próximas seções iremos definir um novo tensor, chamado tensor de Riemann (tensor de curvatura) o qual possui a tarefa de nos informar de modo quantitativo, se um dado espaço é curvo (ou não). O tensor de Riemann, como iremos ver, é construído a partir de uma série de derivadas parciais da métrica.

E, de modo complementar, as equações da Relatividade Geral apresentam a curvatura do espaço-tempo como sendo devido à presença de energia e matéria naquele espaço.

Mas, outro conceito notável é que as propriedades dos cones de luz continuam válidas no cenário de espaços curvos! O elemento de linha geral: $ds^2 = g_{ab}(X)dX^a dX^b = 0$ também define cones de luz, no espaço-tempo curvo! Agora, os cones de luz se veem influenciados pela presença da matéria, e a orientação do futuro causal em geometrias com buracos negros armazenam algumas notáveis surpresas para nós.

Para verificá-lo, vamos retornar aos cones de luz da métrica de Minkowski, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.72}$$

Em um caminho radial, $d\theta = d\phi = 0$, de modo que teremos:

$$dt^2 = dr^2 \tag{2.73}$$

A inclinação do cone de luz nesta métrica ($c = 1$) é dada pela tangente do coeficiente que aparece multiplicando dt, neste caso, a tangente de 1, logo, a abertura do cone de luz é de 45 graus. Veja a figura abaixo.

Na métrica de Schwarzschild, teremos:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.74}$$

Seguindo um caminho puramente radial, se aproximando da fonte do campo, iremos obter:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 \tag{2.75}$$

A partir do qual se obtém:

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 dt^2 = dr^2 \tag{2.76}$$

Desta vez, a abertura do cone de luz é dada pela tangente do coeficiente que multiplica dt acima, portanto:

$$a(r) = tan\left(1-\frac{2M}{r}\right) \tag{2.77}$$

Observe que a abertura do cone de luz tende a zero no limite em que $r \to 2M$. A figura abaixo ilustra bem este comportamento, nas coordenadas de Schwarzschild:

2.7.5 A métrica como uma matriz

A métrica pode ser escrita como uma matriz:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Propriedades: $g_{ab} = g_{ba}$: a métrica é simétrica nos seus índices.

Segundo, a métrica é inversível: existe uma métrica, contravariante onde:

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c \tag{2.79}$$

Lembre-se da convenção de soma de Einstein: o índice b está sendo somado de 0 até 3. Por outro lado, a matriz que corresponde ao tensor contravariante g^{ab} corresponde à matriz inversa de g_{ab}, pois $\delta^a{}_c = 1$ para $a = c$, e $\delta^a{}_c = 0$, em caso contrário ($a \neq c$).

Exemplo: Se a matriz g_{ab} é diagonal, então é muito fácil calcular a sua inversa. Suponha que o tensor g_{ab} seja diagonal:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

a inversa de g_{ab} é fácil de ser calculada:

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 1/A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

toda matriz diagonal tem como inversa, uma matriz formada com uma diagonal cujos elementos são inversos aritméticos dos elementos da primeira matriz.

A assinatura da métrica acima é -2 pois existem 3 termos negativos e o primeiro é positivo. Vamos trabalhar com métricas de assinatura +2, onde vetores tipo-tempo têm quadrado da norma negativa e vetores tipo-espaço têm quadrado da norma positiva.

O elemento de linha do espaço-tempo plano vazio, de Minkowski, tem métrica chamada η_{ab} onde:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

visto que o elemento de linha é: $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ em coordenadas Cartesianas.

A métrica é um tensor de segunda ordem e pode ser expresso como:

$$g = g_{ab}\omega^a \otimes \omega^b \tag{2.83}$$

em uma base geral das 1-formas.

Em particular, se escolhermos a base coordenada então: $\omega^a = dX^a$ e poderemos escrever:

$$g = g_{ab}dX^a \otimes dX^b \tag{2.84}$$

O elemento de linha é o ingrediente mais importante da Relatividade Geral e ele é equivalente à escolha da métrica. Na prática, nós começamos com uma escolha dele, e esta escolha tem uma ligação com o conteúdo de matéria-energia do espaço-tempo. Além disso, a escolha da forma do elemento de linha reflete alguma simetria subjacente do espaço-tempo. Por exemplo, a parte espacial da métrica que descreve uma estrela perfeitamente esférica deve refletir esta mesma simetria. Se um sistema é independente do tempo, os coeficientes da métrica também o serão, por exemplo a métrica estática de Schwarzschild que descreve um buraco negro estático e

sem rotação. Muitas métricas não-diagonais importantes foram descobertas pelos pesquisadores em Relatividade Geral, e teremos oportunidade de falar sobre elas mais adiante.

2.8 Operações com o tensor métrico

Nós podemos usar a métrica com o objetivo de extrair as componentes dos tensores, levantando e abaixando índices. Se V^a são as componentes contravariantes de um vetor, as suas componentes covariantes são:

$$V_a = g_{ab} V^b \tag{2.85}$$

Nós também temos: $U^a = g^{ab} U_b$ e assim por diante.

Exemplo: Considere o 3-espaço em coordenadas esféricas e os tensores:

$$X^a = (-1, r, cos(\theta)) \tag{2.86a}$$
$$Y_b = \big(0, -r, r^2 sin(\theta)\big) \tag{2.86b}$$

Calcule as componentes: X_b and Y^b.

Solução:

A métrica é diagonal, cujas componentes são:

$$g_{ab} = diag\left(1, r^2, r^2 sin^2(\theta)\right) \tag{2.87a}$$
$$g^{ab} = diag\left(1, r^{-2}, r^{-2} sin^{-2}(\theta)\right) \tag{2.87b}$$

Denota-se por $g = diag(...)$ quando a matriz tem apenas os elementos da diagonal e os outros termos são nulos.

Agora, podemos escrever:

$$X_a = g_{ab} X^b \tag{2.88}$$

e cada componente vale:

$$X_r = g_{rb} X^b = g_{rr} X^r + g_{r\theta} X^\theta + g_{r\phi} X^\phi \tag{2.89}$$

Mas, temos somente os termos da diagonal, portanto é simples escrever:

$$X_r = g_{rr} X^r = 1 * (-1) = -1 \tag{2.90a}$$
$$X_\theta = g_{\theta\theta} X^\theta = r^2 r = r^3 \tag{2.90b}$$
$$X_\phi = g_{\phi\phi} X^\phi = r^2 sin^2(\theta) cos(\theta) \tag{2.90c}$$

e:

$$Y^r = g^{rr}Y_r = 1 * 0 = 0 \quad (2.91a)$$
$$Y^\theta = g^{\theta\theta}Y_\theta = r^{-2} * (-r) = -\frac{1}{r} \quad (2.91b)$$
$$Y^\phi = g^{\phi\phi}Y_\phi = r^{-2}sin^{-2}(\theta)cos^2(\theta) = \frac{cot^2(\theta)}{r^2} \quad (2.91c)$$

Exercício 6: Calcule os produtos: X_bX^b e Y_aX^a usando os tensores e a métrica acima. Estas quantidades serão invariantes?

2.9 Passando argumentos à métrica

Podemos considerar tensores como aplicações que mapeiam vetores e 1-formas em números reais, e a métrica pode ser considerada de modo um pouco diferente. Especificamente, nós podemos visualizá-la como um tensor de segunda ordem que aceita dois vetores como argumentos. A saída é um número real: o produto escalar entre os vetores:

$$g(V, U) = V.U \quad (2.92)$$

Se visualizamos o tensor métrico desta maneira, percebemos que as componentes do mesmo serão encontrados passando os vetores de base como seus argumentos, isto é:

$$g(e_a, e_b) = e_a.e_b = g_{ab} \quad (2.93)$$

No espaço-tempo plano, teremos: $e_a.e_b = \eta_{ab}$.

Exemplo: Considere os vetores de base do sistema Cartesiano, que são ortogonais:

$$\partial_x\partial_x = 1 \quad (2.94a)$$
$$\partial_y\partial_y = 1 \quad (2.94b)$$
$$\partial_z\partial_z = 1 \quad (2.94c)$$

Mostre que o produto escalar dos vetores de base em coordenadas esféricas fornecem as componentes da métrica.

Solução:

As transformações entre as coordenadas são:

$$x = rsin(\theta)cos(\phi) \tag{2.95a}$$
$$y = rsin(\theta)sin(\phi) \tag{2.95b}$$
$$z = rcos(\theta) \tag{2.95c}$$

Agora, temos: $e_{a'} = \Lambda^{b}{}_{a'}e_b$ e abrindo a expressão temos:

$$\partial_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\partial_z \tag{2.96}$$

Logo, aplicando a eq.(2.62) acima:

$$\partial_r = sin(\theta)cos(\phi)\partial_x + sin(\theta)sin(\phi)\partial_y + cos(\theta)\partial_z \tag{2.97}$$

Portanto, usando que: $\partial_x.\partial_x = 1, \partial_x.\partial_y = 0, ...$ obtém-se:

$$\begin{aligned} g_{rr} = \partial_r.\partial_r = sin^2(\theta)cos^2(\phi) + sin^2(\theta)sin^2(\phi) + cos^2(\theta) = \\ = sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Agora, do mesmo modo:

$$\partial_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\partial_z \tag{2.99}$$

Usando a eq.(2.59) e calculando o produto escalar:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} = \partial_\theta.\partial_\theta = \\ = r^2\left[cos^2(\theta)(cos^2(\phi) + sin^2(\phi)) + sin^2(\theta)\right] = r^2 \end{aligned} \tag{2.100}$$

Finalmente, o terceiro termo é:

$$\partial_\phi = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)\partial_z \tag{2.101}$$

Calculando-se o produto escalar teremos:

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} = \partial_\phi\partial_\phi = \\ = r^2sin^2(\theta)sin^2(\phi) + r^2sin^2(\theta)cos^2(\phi) = \\ = r^2sin^2(\theta) \end{aligned} \tag{2.102}$$

Conclusão: em coordenadas Cartesianas a métrica é representada por:

$$g = diag(1, 1, 1) \tag{2.103}$$

e o mesmo objeto é representado como:

$$g = diag(1, r^2, r^2 sin^2(\theta)) \tag{2.104}$$

em coordenadas esféricas. Tal resultado é muito importante e iremos usá-lo novamente, mais adiante. Podemos escrever a matriz das componentes da métrica (2.70) como:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercício 7: Escreva a métrica do espaço 3D em coordinadas cilíndricas: (ρ, θ, z).

2.10 Tensores e Variedades

2.10.1 Curvas Parametrizadas

As coordenadas de um ponto no espaço-tempo podem ser associadas à aplicação: $X^a = X^a(\lambda)$. Iremos considerar que existe um parâmetro λ (número real) tal que:

$$X^a = X^a(\lambda) \tag{2.105}$$

no sentido de que $X^a(\lambda)$ é diferenciável como função de λ. Desta forma, conforme λ varia, nós obtemos uma curva na variedade M. Vamos considerar que esta curva é diferenciável se e somente se X^a também o seja. Na figura abaixo, temos uma família de curvas (congruência) e uma função $\lambda : t \to M$ que mapeia um número real t do intervalo I dos reais, em um ponto da variedade M. Este ponto pertence à uma curva. O vetor: $\frac{dX^a}{d\lambda}$ é tangente à curva no ponto p e as coordenadas deste vetor vivem no espaço R^n, onde estão definidas as coordenadas $X^a(p)$. Em particular podemos tomar $n = 4$ para os nossos propósitos de estudo da Relatividade:

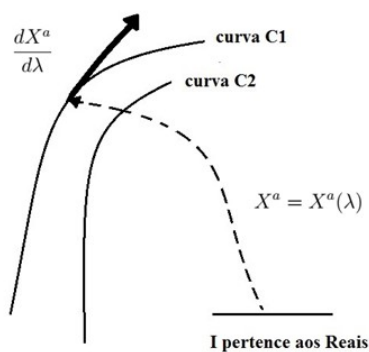



Figure 2.2: vetor tangente $\frac{dX^a}{d\lambda}$

A figura abaixo mostra as relações entre a variedade, a curva $q(t)$, um ponto de M e as respectivas coordenadas de p no R^n que são: $X^a(p)$.

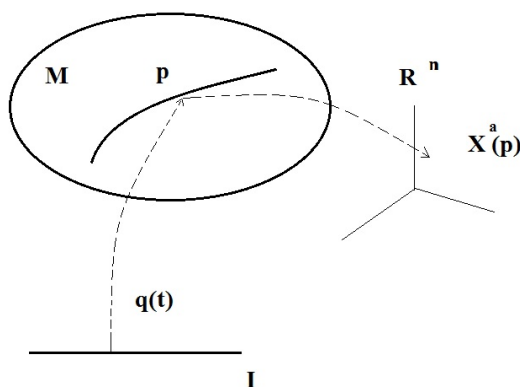



Figure 2.3: coordenadas de p mapeadas no R^n

É bastante evidente que em muitos exemplos o parâmetro λ pode representar o tempo-próprio τ ou o tempo coordenado t, mas não há a necessidade de se restringir a apenas tais escolhas.

2.10.2 Vetores Tangentes e 1-formas

Se a variedade é curva, nós não podemos somar vetores em pontos diferentes dela (ou subtrair vetores em pontos diferentes), de modo que a noção de derivadas corre o risco de perder o seu significado usual. Mas, não podemos escrever teorias da física sem o uso de derivadas e operadores diferenciais, de modo que há a necessidade de incluírmos uma noção mais geral, exata e

consistente, da derivada em variedades curvas. Como podemos generalizar esta ideia? Primeiro, vamos começar com o conceito de curva.

Vetores tangentes podem ser facilmente definidos em curvas, assim, a quantidade:

$$\frac{dX^a}{d\lambda} \tag{2.106}$$

é o vetor **tangente vector à curva** cujas coordenadas são X^a.

Exemplo: qual é o vetor tangente à curva: $X^a = (cos(\theta), sin(\theta))$? **Solução:** aqui, o parâmetro é θ:

$$\frac{dX^a}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(cos(\theta), sin(\theta)) = (-sin(\theta), cos(\theta)) \tag{2.107}$$

2.10.3 Base

Agora que nós encontramos como determinar um vetor que é tangente a uma curva, o próximo passo é encontrar uma base. A regra da cadeia permite-nos escrever:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dX^a}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial X^a} \tag{2.108}$$

visto que f é arbitrário, pode-se escrever também:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dX^a}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial X^a} \tag{2.109}$$

Logo, encontramos a base do vetor $\frac{d}{d\lambda}$:

$$e_a = \frac{\partial}{\partial X^a} \tag{2.110}$$

2.10.4 Regras de transformação

Do mesmo modo, as componentes da base se transformam linearmente de acordo com:

$$e_{a'} = \frac{\partial}{\partial X^{a'}} = \frac{\partial X^b}{\partial X^{a'}}\frac{\partial}{\partial X^b} = \Lambda^b{}_{a'} e_b \tag{2.111}$$

Da mesma maneira, os vetores da base e_b são expandidos como:

$$e_b = \Lambda^{a'}{}_b e_{a'} \tag{2.112}$$

Os termos $\Lambda^{a'}{}_b$ são muito gerais: envolvem transformações de coordenadas gerais ou ativas (exemplo: as transformações de Lorentz).

Exercício 8: Calcule as matrizes $\Lambda^{a'}{}_b$ considerando a transformação de Lorentz ao longo dos eixos: $(Y - Y')$, os demais eixos permanecendo imutáveis. Qual é o valor de: $\Lambda^{a'}{}_b \Lambda^b{}_{c'}$?

2.10.5 1-formas e produto escalar

Uma operação extremamente importante a ser efetuada nesses espaços, tem a ver com o produto escalar. Desta forma, vamos impor que o produto escalar entre as **1-formas de base:** ω^a e os vetores da base dual: e_bé dado por:

$$< \omega^a, e_b >= \delta^a{}_b \tag{2.113}$$

A partir desta operação, é possível agora aplicá-la a 1-formas e vetores gerais. Considerando que uma 1-forma pode ser expandida como: $\tilde{p} = p_a \omega^a$ e um vetor $U = U^b e_b$, teremos que produto escalar entre um vetor U e uma 1-forma $\tilde{p}$ é:

$$p.U =< \tilde{p}, U >=< p_a \omega^a, U^b e_b >= p_a U^b < \omega^a, e_b >= p_a U^a \tag{2.114}$$

pois usamos a ortogonalidade dada pela eq.(2.79) acima.

Se escolhermos a base canônica (coordenada) e a sua dual, iremos obter:

$$< \omega^a, e_b >=< dX^a, \frac{\partial}{\partial X^b} >= \frac{\partial X^a}{\partial X^b} = \delta^a{}_b \tag{2.115}$$

Note que a relação eq.(2.80) ainda deve valer, mesmo quando as bases não são coordenadas. A introdução acima sobre a álgebra de tensores e formas deve ser completada em textos mais extensos do que esse, mas foi mais do que suficiente para introduzirmos operações básicas. O próximo passo é a construção do cálculo de tensores, que é essencial para a formulação de teorias físicas com covariância manifesta.

2.11 Cálculo Tensorial

2.11.1 Princípio da Covariância

As leis da física devem ser invariantes na forma, quando mudamos de sistema de referência (covariância). Por consequência, a forma das leis da física devem envolver relações tensoriais, pois uma equação tensorial que é nula em um sistema de referência, continuará a sê-lo em todos os sistemas de referência.

Isto é uma consequência direta da lei de transformação linear que define os tensores.

Tome por exemplo o tensor $U^{ab} = 0$ em S. É fácil ver que ele é escrito como: $U'^{ab} = 0$ em S':

$$U'^{ab} = \Lambda^{a'}{}_{c}\Lambda^{b'}{}_{d}U^{cd} = 0 \tag{2.116}$$

logo, $U'^{ab} = 0$ também vale em S'.

Considere as equações de campo de Einstein: $G_{ab} = -kT_{ab}$, as quais valem em S. Escreva-as como: $G_{ab} + kT_{ab} = 0$ em S. Logo, pode-se chamar a combinação: $G_{ab} + kT_{ab} = U_{ab}$, e pronto, concluímos, devido acima, que $U_{a'b'} = 0$ em S', logo, as equações de Einstein têm a mesma forma em S'.

Entretanto, as leis da física contêm derivadas e algumas derivadas parciais. Logo, esperamos que os tensores sejam funções diferenciáveis das coordenadas. Mas, aplicando-se esta ideia, chegamos a algumas surpresas. Uma delas, é que a derivada parcial de um tensor não é mais um tensor.

Considere o tensor $A = A^b e_b$ em uma base e_b. A sua derivada parcial é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial X^a} &= \frac{\partial}{\partial X^a}\left(A^b e_b\right) = \\ &= \left(\frac{\partial A^b}{\partial X^a}\right) e_b + A^b\left(\frac{\partial e_b}{\partial X^a}\right)\end{aligned} \tag{2.117}$$

Em coordenadas Cartesianas e_b não depende das coordenadas, mas isto não é verdade em outros sistemas (polar, esférico, etc).

Como um exemplo, vamos mudar para coordenadas polares: $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$, considere as equações de transformação (2.93a,b,c).

A matriz de transformação é:

$$\Lambda^a{}_{b'} = \left(\frac{\partial X^a}{\partial X^{b'}}\right) \tag{2.118}$$

onde: $X^a = (x, y, z)$ e $X^{b'} = (r, \theta, \phi)$. Em forma matricial, teremos:

$$\Lambda^a{}_{b'} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right) \end{pmatrix} \tag{2.119}$$

Portanto, a matriz é agora dada por:

$$\Lambda^a{}_{b'} = \begin{pmatrix} sin(\theta)cos(\phi) & sin(\theta)sin(\phi) & cos(\theta) \\ rcos(\theta)cos(\phi) & rcos(\theta)sin(\phi) & -rsin(\theta) \\ -rsin(\theta)sin(\phi) & rsin(\theta)cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

onde usamos as transformações dadas nas eqs.(2.93a,b,c).

Se e_a denota a base Cartesiana e $e_{b'}$ denota a base em coordenadas polares, iremos obter: $e_{b'} = \Lambda^a{}_{b'} e_a$. Isto é suficiente para relacionar as bases sob a transformação acima.

Então, a partir da matriz acima, nós podemos escrever:

$$e_r = sin(\theta)cos(\phi)e_x + sin(\theta)sin(\phi)e_y + cos(\theta)e_z \tag{2.121a}$$

$$e_\theta = rcos(\theta)cos(\phi)e_x + rcos(\theta)sin(\phi)e_y - rsin(\theta)e_z \tag{2.121b}$$

$$e_\phi = -rsin(\theta)sin(\phi)e_x + rsin(\theta)cos(\phi)e_y \tag{2.121c}$$

Agora, vamos definir:

$$\left(\frac{\partial e_a}{\partial X^b}\right) = \Gamma^c{}_{ab} e_c \tag{2.122}$$

Os coeficientes $\Gamma^c{}_{ab}$ são denominados: **conexão**.

Vamos escolher como X^b o referencial polar. Vamos calcular alguns termos:

$$\left(\frac{\partial e_r}{\partial \theta}\right) = cos(\theta)cos(\phi)e_x + cos(\theta)sin(\phi)e_y - sin(\theta)e_z = \frac{e_\theta}{r} \tag{2.123}$$

Isto implica em:

$$\left(\frac{\partial e_a}{\partial \theta}\right) = \Gamma^c{}_{ab} e_c = (\text{choose a=r}) \rightarrow \Gamma^r{}_{r\theta} e_r + \Gamma^\theta{}_{r\theta} e_\theta + \Gamma^\phi{}_{r\theta} e_\phi = \frac{e_\theta}{r} \tag{2.124}$$

uma simples comparação nos leva a:

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \tag{2.125a}$$

$$\Gamma^r{}_{r\theta} = 0 \tag{2.125b}$$

$$\Gamma^\phi{}_{r\theta} = 0 \tag{2.125c}$$

De modo similar podemos calcular os outros termos:

$$\left(\frac{\partial e_r}{\partial r}\right) = 0 \rightarrow \Gamma^c{}_{rr} e_c = 0 \tag{2.126}$$

Mas, abrindo a expressão no índice c que está sendo somado, obtém-se:

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \Gamma^c{}_{rr} e_c = \Gamma^r{}_{rr} e_r + \Gamma^\theta{}_{rr} e_\theta + \Gamma^\phi{}_{rr} e_\phi = 0 \tag{2.127}$$

e como consequência: $\Gamma^r{}_{rr} = \Gamma^\theta{}_{rr} = \Gamma^\phi{}_{rr} = 0$.

Nós convidamos o leitor a calcular os termos restantes da conexão ($\Gamma^a{}_{bc}$), usando os procedimentos acima.

Exercício 9: Calcule todos os termos da conexão da transformação entre as coordenadas Cartesianas (X, Y, Z) e as coordenadas polares: (r, θ, ϕ). Feito isto, faça o mesmo na transformação das Cartesianas para as coordenadas cilíndricas: (ρ, θ, z).

2.11.2 Derivadas de tensores

Agora, estamos em posição de determinar a derivada de tensores, tendo em vista que procuramos expressões covariantes. Considere um tensor expandido como $A = A^b e_b$, então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial X^a}\right) &= \\ &= \left(\frac{\partial A^b}{\partial X^a}\right) e_b + A^b \left(\frac{\partial e_b}{\partial X^a}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A^b}{\partial X^a}\right) e_b + A^b \Gamma^c_{ba} e_c = \\ &= \left[\left(\frac{\partial A^b}{\partial X^a}\right) + A^c \Gamma^b_{ca}\right] e_b \end{aligned} \tag{2.128}$$

acima, colocamos em evidência o termo: e_c trocando o índice $b \to c$.

O termo em colchetes é denominado **derivada covariante:**

$$\nabla_a A^b = \left[\left(\frac{\partial A^b}{\partial X^a}\right) + \Gamma^b_{ca} A^c\right] \tag{2.129}$$

É um momento bem adequado realizarmos algumas observações: 1) a conexão não é um tensor, 2) a derivada parcial de um tensor não é um tensor, mas 3) a derivada covariante de um tensor é ela mesma um tensor. Isto se deve ao fato de que a conexão compensa as mudanças próprias na transformação das coordenadas.

Logo, nós obtivemos uma ferramenta muito importante para fazer cálculo tensorial de modo consistente com a covariância, em variedades curvas. Esta ferramenta irá nos permitir definir equações que são covariantes (se transformam de modo uniforme) sob transformações gerais de coordenadas. E, esta

construção é útil em física, pois desejamos construir teorias com covariância manifesta nas suas equações.

Outro ponto importante: a conexão é uma estrutura extra na variedade do espaço-tempo. Note no entanto, que ela não é única, e algumas simetrias podem ou não ser respeitadas. Dentro do escopo do nosso texto, iremos trabalhar com conexões simétricas, isto é: $\Gamma^a{}_{cd} = \Gamma^a{}_{dc}$. Este tipo de conexão é suficiente para os nossos propósitos. Uma conexão que não é simétrica define um espaço chamado espaço com torsão, e tais teorias são exploradas em [20] e outras referências que lá se encontram.

Algumas derivadas covariantes:

1) A derivada covariante de uma função escalar é igual à sua derivada parcial:

$$\nabla_a (\Phi) = \partial_a (\Phi) \tag{2.130}$$

Não é de se surpreender, visto que uma função escalar não possui índices tensoriais.

2) A derivada covariante de uma **1-forma** σ_b é:

$$\nabla_a (\sigma_b) = \partial_a (\sigma_b) - \Gamma^c{}_{ab}\sigma_c \tag{2.131}$$

3) A derivada covariante do tensor T^{ab} é:

$$\nabla_c \left(T^{ab}\right) = \partial_c T^{ab} + \Gamma^a{}_{cd}T^{db} + \Gamma^b{}_{cd}T^{ad} \tag{2.132}$$

4) A derivada covariante do tensor misto $T^a{}_b$ é:

$$\nabla_c (T^a{}_b) = \partial_c T^a{}_b - \Gamma^e{}_{cb}T^a{}_e + \Gamma^a{}_{ce}T^e{}_b \tag{2.133}$$

aparecem duas conexões, pois o tensor acima tem dois índices tensoriais.

5) A derivada covariante do tensor misto $T^a{}_{bc}$ é:

$$\nabla_d (T^a{}_{bc}) = \partial_d T^a{}_{bc} + \Gamma^a{}_{de}T^e{}_{bc} - \Gamma^e{}_{db}T^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{dc}T^a{}_{be} \tag{2.134}$$

e assim por diante.

Para deduzir o resultado (2.118) acima, você pode construir um tensor de segunda ordem como o produto de dois tensores de ordem um: $T^{ab} = U^a V^b$, aplique a derivada covariante e use a regra de Leibniz.

Exercício 10: Prove que $\nabla_c (A_a A^a) = \partial_c (A_a A^a)$.

Exercício 11: Prove que $\nabla_c(\Phi) = \partial_c(\Phi)$ se Φ é um escalar.

Exercício 12: Calcule a derivada covariante de $T^{ab}U_b$ de dois modos possíveis e compare os resultados.

O próximo passo é construir uma relação entre a métrica e a conexão (lembre-se que ela não é única), a mais simples possível e de preferência com

torsão nula. Vamos definir uma conexão muito importante que é denominada símbolos de Christoffel.

2.11.3 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel formam um tipo particular de conexão e que é usada na Relatividade Geral. Este tipo de conexão depende das derivadas parciais do tensor métrico. Há dois tipos. Os **símbolos de Christoffel de primeiro tipo** são dado por:

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(g_{bc,a} + g_{ca,b} - g_{ab,c}) \tag{2.135}$$

onde: $g_{bc,a} = \frac{\partial g_{bc}}{\partial X^a}$.

Por sua vez, os símbolos de Christoffel de **segundo tipo**, e os de primeiro, estão relacionados pela métrica por:

$$\Gamma^a{}_{bc} = g^{ad}\Gamma_{dbc} = \frac{g^{ad}}{2}\left(g_{bc,d} + g_{cd,b} - g_{db,c}\right) \tag{2.136}$$

Nós dizemos que uma conexão é métrico-compatível se ela satisfizer:

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \tag{2.137}$$

Em outras palavras, conexões métrico-compatíveis são aquelas para as quais a derivada covariante da métrica é zero. Em Relatividade Geral nós iremos considerar conexões simétricas que são métrico-compatíveis. Desta forma, a eq.(2.99) pode ser escrita como:

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ac} g_{db} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} \tag{2.138}$$

é fácil mostrar que: $\nabla_c g_{ab} = 0$ implica nas relações eq.(2.121) acima, é suficiente permutar os índices a, b, c de modo cíclico.

Prova:

A partir da definição da derivada covariante, teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla_c g_{ab} &= g_{ab,c} - \Gamma^d{}_{ac} g_{db} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} = 0 \\
\nabla_a g_{cb} &= g_{cb,a} - \Gamma^d{}_{ac} g_{db} - \Gamma^d{}_{ab} g_{cd} = 0 \\
-\nabla_b g_{ac} &= -g_{ac,b} + \Gamma^d{}_{ba} g_{dc} + \Gamma^d{}_{bc} g_{ad} = 0
\end{aligned}$$

Somando as três equações acima obtém-se:

$$g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{ac} g_{db} = 0$$

Uma vez que a conexão e a métrica são ambas simétricas, podemos reduzi-lo para:

$$g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b} - 2\Gamma^{d}{}_{ca} g_{db} = 0$$

Do que, se obtém, imediatamente:

$$\Gamma^{d}{}_{ca} g_{db} = \frac{1}{2} \left(g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b} \right)$$

Para eliminar g_{db} é fácil, basta multiplicar por: g^{be} lado a lado da expressão:

$$\Gamma^{d}{}_{ca} g_{db} g^{be} = \Gamma^{d}{}_{ca} \delta_{d}{}^{e} = \frac{g^{be}}{2} \left(g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b} \right)$$

E, contraindo-se sobre o índice d, obteremos:

$$\Gamma^{e}{}_{ca} = \frac{g^{be}}{2} \left(g_{ab,c} + g_{cb,a} - g_{ac,b} \right)$$

que é a expressão desejada. O próximo exemplo é extremamente importante, pois iremos calcular as componentes da conexão para um elemento de linha diagonal que será muito recorrente ao longo deste texto, acompanhe a sua solução, passo a passo.

Exemplo: Considere o elemento de linha:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{2.140}$$

Calcule as componentes $\Gamma^{0}{}_{01}, \Gamma^{1}{}_{00}, \Gamma^{1}{}_{11}, \Gamma^{1}{}_{22}$ dos símbols de Christoffel, para esta métrica.

Solução:

As componentes da métrica são extraídas diretamente:

$$g_{ab} = diag\left(A(r), -B(r), -r^2, -r^2 sin^2(\theta) \right) \tag{2.141}$$

e sua inversa (é diagonal também) é dada por:

$$g^{ab} = diag\left(\frac{1}{A(r)}, -\frac{1}{B(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 sin^2(\theta)} \right) \tag{2.142}$$

Os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\Gamma^{a}{}_{bc} = \frac{g^{ad}}{2} \left(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d} \right) \tag{2.143}$$

onde: $g_{ab,c}$ denota a derivada parcial relativo à coordenada x^c, e neste caso, nossas componentes são: (t, r, θ, ϕ). Os números $(0, 1, 2, 3)$ são a sequência para (t, r, θ, ϕ). Vamos calcular ${\Gamma^0}_{01}$:

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^0}_{01} &= \frac{g^{0d}}{2}\left[g_{0d,1} + g_{1d,0} - g_{01,d}\right] = \\
&= \frac{g^{00}}{2}\left[g_{00,1} + g_{10,0} - g_{01,0}\right] = \\
&= \frac{g^{00}}{2}\left[g_{00,1}\right] = \frac{A'(r)}{2A(r)}
\end{aligned}
$$

lembre-se: nós somamos sobre o índice d de 0 a 3, mas desde que a métrica é diagonal, o único termo que sobrevive é $d = 0$.

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^1}_{00} &= \frac{g^{1d}}{2}\left[g_{0d,0} + g_{0d,0} - g_{00,d}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[g_{01,0} + g_{01,0} - g_{00,1}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[-g_{00,1}\right] = \frac{A'(r)}{2B(r)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^1}_{11} &= \frac{g^{1d}}{2}\left[g_{1d,1} + g_{1d,1} - g_{11,d}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[g_{11,1}\right] = \frac{B'(r)}{2B(r)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{\Gamma^1}_{22} &= \frac{g^{1d}}{2}\left[g_{2d,2} + g_{2d,2} - g_{22,d}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right] = \\
&= \frac{g^{11}}{2}\left[g_{22,1}\right] = -\frac{r}{B(r)}
\end{aligned}
$$

Os demais termos não nulos são: ${\Gamma^3}_{23}, {\Gamma^1}_{33}, {\Gamma^2}_{12}, {\Gamma^3}_{13}, {\Gamma^2}_{33}$ e nós os deixamos para o leitor. Os demais termos são nulos.

Exercício 13: Calcule os restantes termos não-nulos dos símbolos de Christoffel da métrica acima.

2.12 Formas Diferenciais e o produto exterior

2.12.1 Produto Exterior

O **produto exterior** de 2 1-formas α e β é:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \tag{2.148}$$

É evidente que: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ e $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Se ω^a representa a base das 1-formas, pode-se construir uma p-forma usando o produto:

$$\alpha = \frac{\eta_{a1...ap}}{p!} \omega^{a1} \wedge ...... \wedge \omega^{ap} \tag{2.149}$$

Agora, a derivada exterior transforma uma p-forma em uma (p+1)-forma. Lembre-se de que 0-formas são funções, então a derivada exterior transforma uma 0-forma em uma 1-forma usando a regra da cadeia:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial X^a} \right) dX^a \tag{2.150}$$

onde: dX^a é a base das 1-formas (base coordenada ou base local).

Agora, a derivada exterior de uma p-form α e uma q-form β é dada pela regra:

$$d\left(\alpha \wedge \beta\right) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \tag{2.151}$$

Esta propriedade implica em: $dd\alpha = 0$.

Prova:

Seja α uma p-forma e $d\alpha = \rho$ uma (p+1)-forma. Então:

$$d\rho = d(\rho \wedge 1) = (d\rho) \wedge 1 + (-1)^{p+1} \rho \wedge d(1) \tag{2.152}$$

Mas: $d(1) = 0$. Agora, nós podemos escrever:

$$d\rho = d(1 \wedge \rho) = d(1) \wedge \rho + (-1)^0 1 \wedge d\rho = 1 \wedge d\rho = -d\rho \wedge 1 \tag{2.153}$$

Portanto:

$$d(\rho) = -d\rho \wedge 1 \tag{2.154a}$$

$$d(\rho) = +d\rho \wedge 1 \tag{2.154b}$$

Somando a primeira e a segunda linhas acima:

$$2d(\rho) = 0 \rightarrow d\rho = 0 \tag{2.155}$$

Mas isto implica: $dd\alpha = 0$ uma vez que nós definimos: $\rho = d\alpha$ acima.

Em seguida, nós iremos aplicar a álgebra acima em um importante exemplo. Domine este exemplo, pois nas seções futuras nós iremos precisar calcular o tensor de Einstein G^a_b usando a álgebra das formas e produtos exteriores.

2.12.2 Aplicação real

Exemplo: encontre a derivada exterior de: $\alpha = e^{f(r)} sin(\theta) dt$ and $\beta = e^{-g(r)} cos(\theta) dr$. Mostre que $dd\alpha = 0$.

Solução

A primeira é:

$$d\alpha = e^{f(r)} f'(r) sin(\theta) dr \wedge dt + e^{f(r)} cos(\theta) d\theta \wedge dt \tag{2.156}$$

e a segunda:

$$\begin{aligned} d\beta &= -e^{g(r)} g'(r) cos(\theta) dr \wedge dr - e^{g(r)} cos(\theta) d\theta \wedge dr = \\ &= -e^{g(r)} cos(\theta) d\theta \wedge dr \end{aligned} \tag{2.157}$$

visto que: $dr \wedge dr = 0$.

Agora, para provar que $dd\alpha = 0$ é muito fácil:

$$\begin{aligned} dd\alpha &= e^{f(r)} f'(r)^2 sin(\theta) dr \wedge dr \wedge dt + \\ &+ e^{f(r)} f''(r) sin(\theta) dr \wedge dr \wedge dt + \\ &+ e^{f(r)} f'(r) cos(\theta) d\theta \wedge dr \wedge dt + \\ &+ e^{f(r)} f'(r) cos(\theta) dr \wedge d\theta \wedge dt + \\ &- e^{f(r)} sin(\theta) d\theta \wedge d\theta \wedge dt = 0 \end{aligned} \tag{2.158}$$

uma vez que nós usamos: $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$ acima.

2.13 Derivada de Lie e Comutadores

2.13.1 Congruência de curvas

Uma congruência de curvas em uma variedade M é um conjunto de curvas onde cada ponto tem uma única curva que passe por ele. Uma congruência pode ser definida por um conjunto de vetores tangentes sobre ela:

$$X^a = X^a(\lambda) \tag{2.159}$$

onde: λ é um parâmetro real.

Agora, nós definimos um campo vetorial: U^a em M de tal modo que a derivada:

$$U^a = \frac{dX^a}{d\lambda} \tag{2.160}$$

é tangente à curva em qualquer ponto dela.

A inversa é verdadeira: se nós temos um campo vetorial em uma variedade, nós podems extrair uma congruência a partir dela. Os teoremas das equações diferenciais ordinárias os garantem para nós. É portanto suficiente resolver o sistema de EDOs:

$$\frac{dX^a(\lambda)}{d\lambda} = U^a\left(X(\lambda)\right) \tag{2.161}$$

Lembre-se que nossa variedade é curva: ela implica que a derivada de tensores em pontos diferentes não faz o menor sentido: tensores em pontos diferentes pertencem a espaços tangentes diferentes, deste modo nós necessitamos arrastá-los entre os pontos, usando a congruência que foi definida.

Nós assumimos que U^a é dado e nós construímos a congruência a partir dela.

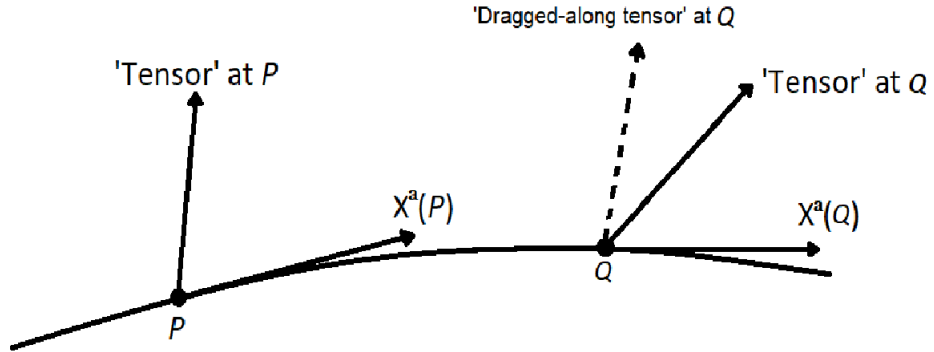



Figure 2.4: comparando um vetor em dois pontos diferentes

Considere as transformações de coordenadas:

$$X'^a = X^a + \delta\lambda U^a \tag{2.162a}$$

$$P \to Q \tag{2.162b}$$

Agora, considere um tensor $T^{ab}(X)$ definido em P. Sob a transformação eq.(2.115a) acima, nós temos:

$$T^{ab}(X) \rightarrow T'^{ab}(X') \tag{2.163}$$

esta transformação arrasta o tensor T^{ab} de P a Q, ao longo da congruência. Mas, sob a transformação, as componentes do tensor T se transformam como:

$$T'^{ab}(X') = \frac{\partial X'^a}{\partial X^c}\frac{\partial X'^b}{\partial X^d}T^{cd}(X) \tag{2.164}$$

agora, aplicando a transformação acima tem-se:

$$= \delta^a_c \delta^b_d T^{cd}(X) + \left[\partial_c U^a T^{cb} + \partial_d U^b T^{ad}\right] \delta\lambda + 0(\lambda^2) \tag{2.165}$$

Mas, expandindo em Taylor $T^{ab}(X')$ nós temos:

$$T^{ab}(X') = T^{ab}(X) + \delta\lambda X^c \partial_c T^{ab}(X) \tag{2.166}$$

2.13.2 Derivada de Lie

Agora, nós estamos em posição de definir a derivada de Lie como:

$$L_X T^{ab} = X^c \partial_c T^{ab} - T^{ac}\partial_c X^b - T^{cb}\partial_c X^a \tag{2.167}$$

Ok, nós temos definido a derivada de Lie de um tensor $(2,0)$ mas este conceito pode surgir de um outro ponto de vista também.

Agora, vamos resumir algumas propriedades relevantes da derivada de Lie:

$$L_X(\lambda A^a + \beta B^a) = \lambda L_X A^a + \beta L_X B^a \tag{2.168a}$$

$$L_X\left(Y^a B_b\right) = B_b L_X(Y^a) + Y^a L_X(B_b) \tag{2.168b}$$

$$L_X(\Phi) = X^a \partial_a(\Phi) \tag{2.168c}$$

$$L_X(Y^a) = [X, Y]^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a \tag{2.168d}$$

A derivada de Lie é muito importante para analisar as simetrias em um dado espaço-tempo, e elas serão usadas para definir os vetores de Killing de uma dada métrica. Nós iremos apresentar esses conceitos mais adiante.

2.14 Derivada absoluta e geodésicas

2.14.1 Derivada absoluta

Considere uma curva parametrizeda por λ, e $U^a = \frac{dX^a}{d\lambda}$ é tangente a esta curva. A **derivada absoluta** do vetor U^a é definida por:

$$\frac{DU^a}{D\lambda} = \frac{dU^a}{d\lambda} + \Gamma^a{}_{bc} u^b U^c \tag{2.169}$$

onde $\Gamma^a{}_{bc}$ é a conexão, e $u^b = \frac{dX^b}{d\lambda}$.

A derivada absoluta é um conceito muito importante pois ele define as geodésicas no espaço-tempo. A geodésica é o caminho que uma partícula livre segue no espaço-tempo quando apenas a gravidade atua sobre ela. A geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos (ou eventos) no espaço-tempo.

2.14.2 Geodésicas

A geodésica é uma curva no espaço-tempo definida por:

$$\frac{Du^a}{D\lambda} = \beta(\lambda) u^a \tag{2.170}$$

onde $u^a = \frac{dX^a}{d\lambda}$ é o vetor tangente à geodésica e $\beta(\lambda)$ é uma arbitrária e contínua função do parâmetro λ. Inserindo $u^a = \frac{dX^a}{d\lambda}$ no lado esquerdo leva-nos a:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dX^a}{d\lambda}\right) + \Gamma^a{}_{bc} \frac{dX^b}{d\lambda}\frac{dX^c}{d\lambda} = \beta(\lambda)\frac{dX^a}{d\lambda} \tag{2.171}$$

O **parâmetro afim** é definido por: $\beta(\lambda) = 0$, então se λ é afim, a equação geodésica é simplificada para:

$$\left(\frac{d^2X^a}{d\lambda^2}\right) + \Gamma^a{}_{bc} \frac{dX^b}{d\lambda}\frac{dX^c}{d\lambda} = 0 \tag{2.172}$$

A **equação geodésica** é muito importante: o estudo do movimento de partículas (e luz) em torno de buracos negros (e outros corpos celestes) é descrito pelas geodésicas!

Exercício 13: Determine as equações geodésicas para partículas com massa (escolha o tempo próprio como parâmetro) na métrica dada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{2.173}$$

2.15 Tensor de Riemann

2.15.1 Definição do tensor de Riemann

A curvatura do espaço-tempo é dada por outro tensor: o tensor de Riemann $R^a{}_{bcd}$. Uma condição necessária e suficiente para um espaço-tempo curvo é que o seu tensor de Riemann tensor seja não nulo.

O tensor de Riemann é definido pelo comutador da derivada covariante aplicada em um vetor arbitrário U^c:

$$\begin{cases} [\nabla_a, \nabla_b] \, U^c = R^c{}_{abd} U^d \\ \text{where: } [\nabla_a, \nabla_b] = \nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a \end{cases} \tag{2.174}$$

Note que as derivadas covariantes não comutam.

Ao inserirmos a definição da derivada covariante em termos da conexão, é fácil mostrar que a expressão acima nos leva a:

$$\begin{aligned} &[\nabla_a, \nabla_b] \, U^c = \\ &= \left(\Gamma^c{}_{ad,b} - \Gamma^c{}_{ab,d} + \Gamma^c{}_{eb} \Gamma^e{}_{ad} - \Gamma^c{}_{ed} \Gamma^e{}_{ab} \right) U^d \end{aligned} \tag{2.175}$$

Portanto, o tensor de Riemann é agora dado por:

$$R^c{}_{abd} = \Gamma^c{}_{ad,b} - \Gamma^c{}_{ab,d} + \Gamma^c{}_{eb} \Gamma^e{}_{ad} - \Gamma^c{}_{ed} \Gamma^e{}_{ab} \tag{2.176}$$

2.15.2 Simetrias do tensor de Riemann

Nós podemos abaixar o índice superior do tensor de Riemmann com o objetivo de investigarmos as suas simetrias:

$$R_{fabd} = g_{fc} R^c{}_{abd} \tag{2.177}$$

Mas, para facilitar a compreensão, nós mudamos os índices para a, b, c, d. Algumas simetrias são imediatas a partir da definição:

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \tag{2.178a}$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \tag{2.178b}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{2.178c}$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0 \tag{2.178d}$$

Estas simetrias são muito importantes e algumas delas serão usadas com o objetivo de extrair o tensor de Einstein (a ser definido logo em breve). As

simetrias que acima foram descritas são algébricas, mas há outras simetrias associadas às derivadas covariantes e elas são chamadas de identidades de Bianchi.

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} = 0 \tag{2.179}$$

As identidades acima e as simetrias algébricas reduzem o número de componentes independentes do tensor de Riemman para: $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Se $n = 4$ nós temos 20 componentes independentes não-nulas deste tensor. Há ainda outras identidades úteis que são usadas nos cálculos, mas iremos abordá-las quando houver a oportunidade.

Exercício 15: Prove as relações de simetria dadas pelas eqs.(2.139a-d).

2.15.3 Tensor de Ricci e escalar de Ricci

A contração do primeiro índice com o terceiro define o tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} \tag{2.180}$$

e, em seguida, a contração deste com a métrica leva ao chamado escalar de Ricci:

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{2.181}$$

O escalar de Ricci é um invariante, e contém informações interessantes sobre a métrica: por exemplo, no caso de buracos negros de Schwarzschild, o escalar Ricci mostra a divergência física dos efeitos de maré próximo da singularidade $r = 0$, pois neste ponto o escalar de Ricci diverge: $R \propto r^{-6}$.

2.15.4 Tensor de Einstein

Ambas as quantidades acima são essenciais para definir o tensor de Eintein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} R \tag{2.182}$$

Esta é a combinação mais relevante destes tensores e está ligada ao tensor de energia-momento do espaço-tempo: T_{ab} como determinado pelas equações de campo de Einstein: $G_{ab} \propto T_{ab}$.

Na prática, resolver as equações de Einstein consiste em calcular o tensor G_{ab}, para uma métrica escolhida g_{ab}, cuja inspiração são algumas simetrias subjacentes no espaço-tempo e para uma distribuição de energia-momento fisicamente realizável (o último critério pode não ser facilmente satisfeito).

As soluções físicas devem evitar: 1) densidade de energia negativa em algum referencial inercial e 2) existência de curvas tipo fechadas, que violam a causalidade local. Soluções que satisfaçam aos critérios acima são chamadas soluções globalmente hiperbólicas.

Finalmente, duas métricas são **conforme relacionadas** se vale:

$$\tilde{g}_{ab} = \omega^2(x) g_{ab} \tag{2.183}$$

para alguma função diferenciável $\omega(x)$. A métrica é **plano-conforme** se pudermos encontrar uma função $\omega(x)$ tal que a métrica é conforme relatecionada à métrica de Minkowski.

$$g_{ab} = \omega^2(x) \eta_{ab} \tag{2.184}$$

Com os ingredientes acima, vamos melhorar a nossa definição de buracos negros:

Buracos negros são soluções exatas das equações de Einstein com fronteira finita nula e imersos em um espaço-tempo assintoticamente plano (a métrica tende suavemente à de Minkowski longe da singularidade do buraco negro). Com fronteira nula queremos dizer que vetores tangentes ao horizonte de eventos são vetores tipo-nulos.

Como consequência da existência de uma fronteira fechada (horizonte de eventos), esta, divide o espaço-tempo em duas regiões que são causalmente desconexas: todo e qualquer evento interno ao buraco negro não pode comunicar a sua natureza a nenhum observador que esteja fora do horizonte de eventos. Qualquer sinal que esteja se propagando dentro do buraco negro tem o seu cone de luz apontando para a singularidade.

Exercício 15: Mostre que o elemento de linha de Schwarzschild é assintoticamente plano, isto é: $\lim_{r\to\infty}(g_{ab}(r)) = \eta_{ab}$. **Elemento de linha de Schwarzschild:**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

2.16 As Equações de Campo de Einstein

2.16.1 A gravidade de Newton

A teoria de Einstein é a mais simples generalização métrica da gravidade Newtoniana envolvendo tensores de ordem 2, simétricos e consistente com a conservação local de energia-momento. Há muitas outras teorias métricas alternativas, como a teoria de Brans-Dicke. Mas, antes de postularmos as

equações de Einstein, vamos estudar a gravidade e a mecânica de Newton, pois os conceitos fundamentais de massa, gravidade e inércia são definidos lá, primeiro.

Na mecânica de Newton nós temos os conceitos fundamentais de massa, força e o potencial gravitacional Φ. As leis de Kepler do movimento planetário foram essenciais para a descoberta da relação entre a gravidade, órbitas e as expressões matemáticas que ligavam tais conceitos. Do ponto de vista construtivo, a questão que Newton respondeu foi: qual era o tipo de força central $F = F(r)$ que seria responsável pelo movimento de um planeta em torno do Sol, de modo que a trajeória do mesmo fosse uma elipse, tendo o Sol em um dos focos. Newton descobriu que o único tipo de lei de força central, responsável por tal tipo de trajetória, seria uma lei de força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o planeta e o Sol. A constante de proporcionalidade, foi obtida após uma análise lógica complementar, e era descrita pelo produto das massas gravitacionais do Sol e do planeta.

Desta forma, a lei de atração gravitacional entre duas massas, na teoria de Newton é:

$$\vec{F}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{e_r} \tag{2.185}$$

onde: $(|e_r| = 1)$.

A gravidade de Newton pode ser formulada via uma teoria de campo (neste caso é escalar) cujo campo Φ satisfaz à equação:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \tag{2.186}$$

A solução $\Phi(x, y, z)$ vai depender da distribuição de massa descrita pela densidade $\rho(x, y, z)$. No **caso particular** de uma massa central M, estática, a força gravitacional exercida sobre uma massa m, é dada por: $\vec{F} = -m\nabla\Phi$, com $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$. Neste modelo em particular, obtemos a expressão da força da eq.(2.146) acima.

De acordo com a eq.(2.146), a intensidade relativa de atração entre duas massas cai conforme elas se distanciam, uma da outra. Se a distância duplica, a força cai por um fator 4.

Na lei de atração gravitacional de Newton, eq.(2.146), há uma simetria aí: a massa m atrai M e M atrai m, de modo que elas são **massas gravitacionais ativas** (geram o campo que influencia a outra). A massa é fonte de gravidade e responde a ela.

Por outro lado, a mecânica de Newton define outra quantidade importante: a massa inercial. A massa inercial mede a resitência que um corpo

ofereca à mudança no seu estado inercial de movimento. Tais mudanças só podem ser providenciadas via forças externas.

A segunda lei da mecânica de Newton relaciona a massa inercial m_i, a aceleração (cinemática) que a partícula recebe e a força externa resultante que foi responsável por tal ganho de aceleração, de acordo com um sistema de referência inercial:

$$\vec{F} = m_i \vec{A} \tag{2.187}$$

onde: $\vec{F}$ é a força, m_i e A é a aceleração medida em um sistema inercial.

Não é óbvio que as massas encontradas nas eqs.(2.146) e (2.148) têm o mesmo significado ou que os seus valores sequer sejam coincidentes.

2.16.2 Princípio de Equivalência

Deste modo, nós temos 3 conceitos de massa:

Massa inercial é a resistência contra mudanças no estado de movimento, de acordo com um sistema de referência inercial:

$$\vec{F} = m_i \vec{A} \tag{2.188}$$

Massa gravitacional passiva é a massa que responde à presença de um campo gravitacional dado pelo gradiente do campo gravitacional: $-\vec{\nabla}\Phi$.

$$\vec{F} = -m_g \vec{\nabla}\Phi \tag{2.189}$$

Massa gravitacional ativa é a massa que gera campo gravitacional:

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{r} \tag{2.190}$$

onde a expressão à direita vale para o caso de uma massa pontual ou esférica uniforme (com $r > R$, o raio da massa esférica).

Agora, podemos enunciar o Princípio da Equivalência (depois melhoramos a sua formulação): o PE afirma que as três massas acima identificadas são numérica e fisicamente equivalentes. Desta forma, nas equações de movimento, podemos cancelá-las de modo muito conveniente.

Mas, este princípio também é formulado em outras versões mais elaboradas e equivalantes.

O **Princípio de Equivalência Fraco** diz que o potencial gravitational se acopla do mesmo modo para todas as massas e energias: $m_i = m_g$.

Como consequência deste princípio, analisemos a queda livre de um objeto na presença da gravidade da Terra. A força que atrai o mesmo, deve ser responsável por sua aceleração cinemática, logo, teremos:

$$\vec{F} = m_i \vec{A} = -m_g \vec{\nabla}\Phi \rightarrow \vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{2.191}$$

Logo, a aceleração cinemática de sua queda, é igual ao campo gravitacional: $\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi$, e usualmente chamamos de $-\vec{\nabla}\Phi = \vec{g}$, o **campo gravitacional local**. Note que, $\vec{g}$ tem as mesmas dimensões que metro por segundo ao quadrado, e que a aceleração do objeto não depende de sua massa ou de outros detalhes do mesmo! Galileu já houvera se deparado com esta consideração muito antes de Newton.

A grande percepção de Galileu foi enunciar: a aceleração da queda livre (não há outras forças atuando, como a resistência do ar) de objetos no campo de gravidade da Terra, não depende da massa, da composição, da forma e de nenhum outro detalhe deste objeto. Podemos estender este resultado, evidentemente, para qualquer outro planeta, não precisa ser a Terra.

Lembre-se que as definições dinâmicas destas quantidades é diferente, o que nos permite elaborar experimentos minuciosos com o objetivo de obtermos algum limite superior entre a diferença das massas.

Os limites experimentais colocam um limite superior para a diferença entre essas massas, da ordem de:

$$\frac{m_i - m_g}{m_g} \leq 10^{-10} \tag{2.192}$$

isto quer dizer que, se houver alguma diferença entre as massas inercial e gravitacional, a discrepância deve ser menor do que o décimo dígito significativo. É evidente que é impossível provar experimentalmente que $m_i = m_g$ pois não há experimento de precisão infinita.

Os experimentos e limites são muito bem discutidos em H.Ohanian [20].

O **Princípio Forte da Equivalência** diz que as leis da física são as mesmas em um referencial acelerado ou em um campo gravitacional uniforme (cujo campo gravitacional tenha o mesmo valor do campo de aceleração do referencial escolhido). Este princípio, nesta forma, foi usado por Einstein na formulação da Teoria Geral da Relatividade.

2.16.3 Princípio da Covariância

Finalmente, Einstein propôs que: as leis da física devem ser invariantes na forma (covariância) sob todas as transformações de coordenadas possíveis, e para isso, elas devem ser escritas em forma tensorial. Este é o Princípio da Covariância.

Além disso, a principal motivação na busca de uma teoria consistente da gravitação foi a observação de que a teoria de gravidade de Newton é acausal.

O campo gravitacional na teoria de Newton é independente do tempo. Isto significa que qualquer perturbação em uma massa, deve gerar uma perturbação gravitacional que se propaga de modo instantâneo, no espaço. Em outras palavras, a velocidade de propagação desta perturbação, deve ser infinita. Entretanto, isto entra em conflito direto com a Relatividade Especial que apresenta a velocidade da luz como um limite superior físico à propagação de qualquer sinal ou objeto.

Desta forma, Einstein propôs modificar a teoria de Newton, procurando uma teoria mais ampla: 1) covariante, 2) respeitando o Princípio de Equivalência e 3) levando em conta a causalidade: a propagação finita de todas as interações.

A proposta é escrita sob a forma de uma equação tensorial, na verdade um conjunto de equações diferenciais parciais, não lineares e acopladas, denominadas equações de campo de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.193}$$

onde: g_{ab} é a métrica do espaço-tempo, R_{ab} é o tensor de Ricci que foi definido na seção prévia. R é escalar de Ricci e T_{ab} tensor energia-momento.

Esta quantidade exige alguma cautela e uma seção seperada para ela. O tensor T_{ab} leva em conta o conteúdo de energia, momento e pressão de toda e qualquer forma de matéria, energia ou radiação: todas as formas de energia na Relatividade Geral são capazes de gerar campo gravitacional. As componentes de T_{ab} estão relacionadas à pressão, densidade de energia e fluxo de momento e de partículas, mas iremos dedicar uma seção inteira para ele.

Agora, é suficiente saber que T_{ab} deve obedecer a uma lei de conservação local:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \tag{2.194}$$

onde a derivada covariante leva em conta a métrica e a conexão. De fato, a mais simples combinação do lado esquerdo em termos de R_{ab}, g_{ab}, R satisfaz:

$$\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} R \right) = 0 \tag{2.195}$$

Na verdade, Einstein procurou a combinação entre esses tensores de modo que esta identidade fosse satisfeita, e ela leva o nome de indentidade de Bianchi. Uma vez que a energia e momento devem ser localmente conservado, isto levou Einstein a propor que os tensores fossem proporcionais:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} R = -k T_{ab} \tag{2.196}$$

2.16.4 Limite Newtoniano

Considerando o limite Newtoniano: corpos com $v << c$ e campos fracos, é fácil mostrar que: $k = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Para isto, precisamos realizar algumas considerações prévias. Na teoria Newtoniana, a gravidade é descrita por uma função escalar $\Phi(x, y, z)$, denominado potencial gravitacional. Vamos considerar uma partícula movendo-se em um potencial gravitacional fraco e estático. A relação entre o intervalo de tempo próprio e o coordenado é:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \tag{2.197}$$

do que se depreende: $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.
Se $V/c << 1$ temos: $\frac{V}{c} << \frac{dt}{d\tau}$, pois: $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \sim 1$.
Logo, a equação da geodésica se torna:

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dX^b}{d\tau}\frac{dX^c}{d\tau} = 0 \tag{2.198}$$

Como: $\frac{dX^i}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau}$ o segundo termo terá apenas Γ^a_{00}:

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{00}\frac{dX^0}{d\tau}\frac{dX^0}{d\tau} = 0 \tag{2.199}$$

Ou seja:

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{2.200}$$

Agora, vamos calcular: Γ^a_{00}:

$$\Gamma^a_{00} = \frac{g^{ad}}{2}\left(g_{0d,0} + g_{d0,0} - g_{00,d}\right) = -\frac{g^{ad}}{2}g_{00,d} \tag{2.201}$$

Pois a métrica é estática. Agora, como o campo é fraco, podemos expandi-lo como:

$$g_{00} = (1 + \delta)\,\eta_{00} \tag{2.202}$$

com $\delta << 1$ e, $\eta_{00} = c^2$. E, uma vez, novamente, como ele é fraco iremos considerar que: $g^{00} \sim c^2$, ou: $g^{ab} = \eta^{ab}$.

Assim iremos escrever:

$$\Gamma^a_{00} = -\frac{\eta^{ab}}{2}\left[(1+\delta)\eta_{00}\right], b = -\frac{\eta^{ab}}{2}\eta_{00}\delta, b = -c^2\frac{\eta^{ab}}{2}\frac{\partial\delta}{\partial X^b} \tag{2.203}$$

Mas: $\eta^{ab}\partial_b = -\partial^a$, não se esqueça que a métrica é diagonal, logo, a equação se reduz a:

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} + \frac{c^2}{2}\partial^a\delta = 0 \tag{2.204}$$

Ou:

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{2}\partial^a\delta \tag{2.205}$$

A componente temporal $a = 0$ no leva a:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} - c^2\frac{\eta^{0b}}{2}\frac{\partial\delta}{\partial X^b} = 0 \tag{2.206}$$

Mas:

$$\eta^{0b}\frac{\partial}{\partial X^b} = \frac{\partial}{\partial\tau} \tag{2.207}$$

E, visto que δ não depende de τ ou de t, tem-se:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \tag{2.208}$$

cuja solução é: $t = a\tau + b$, vamos escolher um gauge: $a = 1$, $b = 0$, implicando: $t = \tau$.

Usando este gauge, temos:

$$\frac{d^2X^a}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\partial^a\delta \tag{2.209}$$

Na forma vetorial, esta equação é mais familiar:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}\delta \tag{2.210}$$

E, podemos compará-la agora com a conhecida equação da aceleração gravitacional de um potencial Φ:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{2.211}$$

Portanto, a correspondência entre a métrica de um campo fraco e o anólogo Newtoniano leva-nos a:

$$\delta = \frac{2\Phi}{c^2} \tag{2.212}$$

Deta forma:

$$g_{00} = (1+\delta)\,\eta_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)\eta_{00} \tag{2.213}$$

No caso particular de uma massa pontual M, isto se reduz a: $\Phi = -\frac{GM}{r}$, logo:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\eta_{00} \tag{2.214}$$

E, finalmente, no sistema de unidades naturais, $G = c = 1$, tem-se:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\eta_{00} \tag{2.215}$$

com $\eta_{00} = 1$, para uma métrica de assinatura $(+,-,-,-)$.

Tendo obtido um bom palpite para a correspondência entre g_{00}, para um campo estático e fraco, na teoria de Einstein, na forma de: $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$, estamos prontos para usá-lo, nas equações de Einstein, para descobrir qual é o valor do acoplamento entre a geometria e a gravidade, a constante k que aparece em: $G_{ab} = -kT_{ab}$. De certa forma, esta constante estabelece com que intensidade a matéria-energia curvam o espaço-tempo. Obtendo-se k, teremos obtido as equações de Einstein.

Para facilitar a obtenção da constante k, vamos escrever as equações de Einstein na seguinte forma:

$$R_{ab} = -k\left(T_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}T\right) \tag{2.216}$$

Prova:

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R &= -kT_{ab} \\ R^a_b - \frac{\delta^a_b}{2}R &= -kT^a_b \\ R^a_a - \frac{4}{2}R &= -kT \end{aligned}$$

Mas: $R^a_a = R$ logo: $R - 2R = -kT \rightarrow R = kT$, inserindo de volta nas equações de Einstein, provamos a forma dada na eq.(2.177).

Agora, vamos tomar a componente 00:

$$R_{00} = -k\left(T_{00} - \frac{g_{00}}{2}T\right) \tag{2.218}$$

Vamos expandir o lado esquerdo primeiro:

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma^a{}_{0a} - \partial_a \Gamma^a_{00} + \Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{b0} - \Gamma^b_{00}\Gamma^a_{ba} \tag{2.219}$$

Os terceiro e quarto termos podem ser seguramente desprezados, pois são correções não lineares que valem para campos fortes, o que não é o caso aqui. O primeiro termo envolve uma derivada no tempo, mas como o campo é estático, este termo também desaparece. Ficamos com:

$$R_{00} = - - \partial_a \Gamma^a_{00} \tag{2.220}$$

Mas, da definição da conexão obteremos facilmente:

$$\Gamma^a_{00} = \frac{g^{00}}{2}\partial^a g_{00} = \frac{1}{2}\partial^a g_{00} \tag{2.221}$$

pois, na aproximação de campo fraco: $g^{00} \sim 1$.

O tensor de energia-momento corresponde a um fluido com densidade de massa ρ, sem pressão, logo sua componente 00 é: $T_{00} = \rho c^2$ e o traço: $T = \rho c^2$.

Logo, o lado direito torna-se: $-k\left(T_{00} - \frac{g_{00}}{2}T\right) = -k\frac{\rho c^2}{2}$.

Escreveremos a eq.(2.179) como:

$$-\frac{1}{2}\partial_i \partial^i g_{00} = -k\frac{\rho c^2}{2} \tag{2.222}$$

Ou:

$$\nabla^2 g_{00} = k\rho c^2 \tag{2.223}$$

Como: $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$, vem:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{k\rho c^4}{2} \tag{2.224}$$

Mas, a equação da gravitação Newtoniana é:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{2.225}$$

Da igualdade das duas obtemos: $k = \frac{8\pi G}{c^4}$, e isto completa o nosso *anzats* de que as equações de Einstein são:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \tag{2.226}$$

Esta combinação parece ser a mais simples teoria métrica da gravidade que incopora o Princípio da Equivalência, é covariante, e leva ao limite Newtoniano para campos fracos e veocidades pequenas. Quando Einstein obteve

as equações, ele foi capaz de trabalhar uma aproximação e realizar uma previsão teórica ou efeito, que afirmava o encurvamento da luz na presença de corpos massivos (tais como o Sol). O encurvamento da luz pelo Sol foi um teste muito relevante e A. Eddington conduziu observações de eclipse solar no Brasil e na África para detectar este efeito. Os erros experimentais eram muito grandes na época, mas pareciam confirmar o efeito. Anos mais tarde, experimentos com sinais de radar, muito mais precisos, confirmaram o efeito do encurvamento da luz.

Por outro lado, Einstein desejava uma solução exata (sem aproximações) para as suas equações de campo, e não foi ele que logrou resolvê-las. Karl Schwarzschild, matemático e físico alemão, teve o êxito de resolvê-las para o caso importante de uma distribuição de massa estática e sem rotação, no vácuo, ou seja, ele obteve o campo gravitacional exato de uma massa. Iremos resolver as equações de Einstein, e mostrar como esta solução é extremamente importante.

Exercício 16: Prove que as equações de campo de Einstein são invariantes sob transformações gerais de coordenadas.

2.16.5 A constante cosmológica

Finalmente, a anáise de modelos cosmológicos levou Einstein a reformular a teoria incluindo uma constante: a constante cosmológica. Esta constante surge por que as soluções pareciam prever um universo em expansão, mas Einstein imaginava que o mesmo era estático. Esta constante havia sido colocada com o objetivo de se obter uma solução estática, embora modelos homogêneos, isotrópicos e estáticos com constante cosmológica não são estáveis.

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R + \Lambda g_{ab} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \tag{2.227}$$

Agora, a forma mais útil de expressar as equções de Einstein vem a ser adotar o sistema natural, onde: $(G = c = 1)$:

$$G^a{}_b = -8\pi T^a{}_b \tag{2.228}$$

O sinal negativo à frente do tensor energia-momento será ajustado pela assinatura das componentes do mesmo.

Mas, seja cauteloso aqui: Em alguns livros as equações de Einstein são escritas com sinal positivo do lado direito:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R = +kT_{ab} \tag{2.229}$$

Tome cuidado pois a convenção de sinais pode mudar de livro para livro.

A obtenção rigorosa das equações de Einstein se faz com o uso do formalismo Lagrangeano. Este método postula uma função Lagrangeana (que é uma densidade escalar) e a partir dela obtém-se o lado esquerdo das equações de Einstein. Uma Lagrangeana para a contribuição dos campos também deve ser escrita. Tal método é apresentado em diversos livros, entre eles: Ray D'Inverno: *Introducing Einstein's Relativity*.

2.17 A formulação Lagrangeana

Chapter 3

Tensor energia-momento

3.1 Componentes de T_{ab}

Na Teoria Geral da Relatividade, o lado direito das equações de Einstein é o tensor energia-momento. Ele é a fonte da gravidade e é responsável pela curvatura do espaço-tempo. Nesta seção, nós iremos apresentar alguns exemplos físicos deste tensor, investigar as suas propriedades e prestar atenção nas convenções de sinais que são usados.

A primeira propriedade é: $T^{ab} = T^{ba}$, este tensor é simétrico em seus índices. Agora, vamos estudar o significado físico de cada componente deste tensor.

Considere uma superfície definida pela constante: X^b. O T^{ab} é o fluxo da a-componente de momento cruzando a superfície definida por: X^b.

Se $a = t = 0$ estamos falando da energia, logo T^{0a} é o fluxo de energia atravessando a superfície com constante X^a. Deste modo: T^{00} é a energia atravessando uma superfície com $X^0 = t = cte$, portanto ela indica que T^{00} é a densidade de energia. Desde que $E = mc^2$ nós podemos colocar que: T^{00} é a densidade de massa, visto que elas são intercambiáveis.

Outro modo de descobrir T^{00} é usar o limite Newtoniano. No limite Newtoniano, o lado esquerdo das equações de Einstein se reduzem a:

$$\begin{aligned} & R_{00} - \frac{g_{00}}{2} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \rightarrow \\ & \rightarrow -\nabla^2 \left(\frac{2\Phi}{c^2} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \rightarrow \\ & \rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G}{c^2} T_{00} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mas, da gravidade de Newton, sabe-se que:

$$\nabla^2(\Phi) = 4\pi G\rho \rightarrow$$
$$\rightarrow T_{00} = \rho c^2 \tag{3.2}$$

Uma vez que ρ é a densidade de massa, então: $T_{00} = \rho c^2$ é a densidade de energia, pois emprestamos a interpretação dada por: $E = mc^2$.

A figura seguinte mostra todas as componentes do tensor energia-momento:

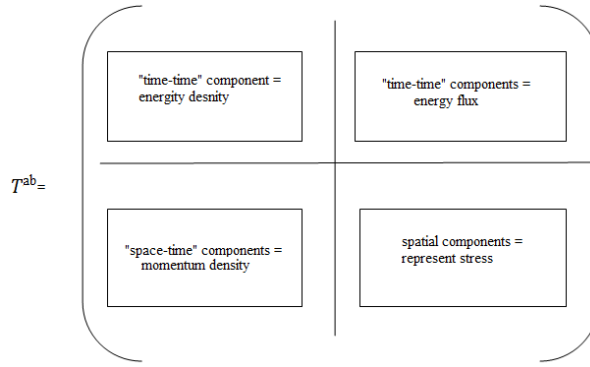



Figure 3.1: significado das componentes de T_{ab}

Logo, nós temos para as T^{ab}-componentes:

1) T^{i0}:= momento por unidade de volume, este é o fluxo de momento atravessando uma superfície de tempo constante.

2) T^{ij}:= stress: este é o fluxo de força por unidade de área (pressão).

3) T^{0i}:= fluxo de energia atravessando uma superfície X^i.

4) T^{00}:= densidade de energia.

Esta última pode ser medida no referencial de um observador com 4-velocidade U_a, logo: $\rho = T^{ab}U_aU_b$, e esta quantidade deve ser positivo-definida. Agora, voltando ao tensor T como um objeto geomtrico. Suas componentes são consideradas como aplicações deste objeto geométrico sobre vetores de base e 1-formas de base:

$$T_{ab} = T(e_a, e_b) \tag{3.3a}$$
$$T^{ab} = T(\omega^a, \omega^b) \tag{3.3b}$$
$$T^a{}_b = T(\omega^a, e_b) \tag{3.3c}$$

As componentes do mesmo formam uma matriz:

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

A **densidade de momento** é o vetor: $\Pi = (T^{10}, T^{20}, T^{30})$, $T^{00} = \rho$:=**densidade de energia**, o **fluxo de energia** é o vetor: $\vec{f} = (T^{01}, T^{02}, T^{03})$ e T^{ij} são as componentes do stress.

Na próxima seção nós determinamos as leis de conservação a partir de hipóteses razoáveis sobre o espaço-tempo.

3.2 Leis de Conservação

A lei de conservação de energia nos remete à ideia de fluxos e integrais. Esta lei pode ser colocada em forma diferencial, envolvendo a derivada covariante. A lei de conservação é expressa como:

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \tag{3.5}$$

ou em termos das conexões:

$$\nabla_a T^{ab} = \partial_a T^{ab} + \Gamma^a_{ac} T^{cb} + \Gamma^b_{ac} T^{ac} = 0 \tag{3.6}$$

em um referencial local: $\Gamma^a_{ac} = \Gamma^b_{ac} = 0$, então a lei de conservação se reduz a:

$$\partial_a T^{ab} = 0 \tag{3.7}$$

esta equação implica a lei de conservação da energia e momento. Tome $b = 0$ e nós temos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial X^i} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{\Pi} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esta equação pode ser transformada em uma relação integral sobre uma região Ω com contorno $\partial\Omega$:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3X\rho + \int_{\partial\Omega} d\vec{\sigma}.\vec{\Pi} = 0 \tag{3.9}$$

se não há fluxo de momento atravessando os contornos, a segunda integral é zero, e nós obtemos que a energia total encerrada em Ω é conservada.

Alguma cautela aqui: a energia é definida em espaços que são assintoticamente planos.

É devido à segunda integral (e os demais termos) que pode ser cancelada que as quantidades conservadas surgem naturalmente. Uma quantidade conservada em um espaço-tempo não assintoticamente plano é muito difícil, pois neste caso a quantidade não será covariante e sua forma e valor irão mudar drasticamente sob mudanças de coordenadas, aplicadas neste espaço. A condição de nenhum fluxo cruzando a fronteira não se aplica aqui.

Consequentemente, em Relatividade Geral, nós apresentamos modelos de sistemas finitos (estrelas, galáxias, etc) em um espaço-tempo assintoticamente plano. Condições bem definidas nos contornos podem ser formuladas e soluções físicas com interpretações coerentes podem ser facilmente analisadas.

3.3 Poeira

Agora, o primeiro exemplo de T^{ab} é a poeira. Poeira é uma coleção de partículas não-interagentes de massa de repouso m e densidade numérica n de tal modo que: $\rho = mn$. Dos resultados da Relatividade Especial faz-se notar que os valores de ρ e n são dependentes do referencial onde são medidos, mas m não, visto que é a massa no sistema de repouso.

Não há pressão aqui. Podemos agora escolher o sistema comóvel: o referencial onde as partículas estão em repouso: $\vec{V} = 0$ e $dt = d\tau$. O mais simples tensor que descreve este fluido é:

$$T^{ab} = \rho U^a U^b \tag{3.10}$$

onde: $U^a = (1, 0, 0, 0)$ é a 4-velocidade de um elemento do fluido no referencial de repouso (rest frame). Deste modo nós temos:

$$T^{ab} = diag(\rho, 0, 0, 0) \tag{3.11}$$

Em outro referencial, diferente do repouso, é muito fácil calcular $\partial_a T^{ab} = 0$ para $b = 0$. Isto nos leva a:

$$\partial_a T^{a0} = 0 \rightarrow \gamma^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho \vec{V}\right) \right] = 0 \tag{3.12}$$

visto que: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$ (fator de Lorentz) é arbitrário, ele cancela acima e obtemos:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho \vec{V}\right)\right] = 0 \tag{3.13}$$

Esta é a equação de continuidade (ρ é a densidade de fluido density medida no referencial de repouso e a 4-velocidade é: $U^i = \gamma V^i$), e esta é uma equação muito importante descrevendo a conservação de um fluido. Em seguida, vamos estudar fluidos com pressão e densidade.

Exercício: A partir da equação: $T^{ab} = \rho U^a U^b$ e da lei de conservação local, deduza a equação de continuidade e prove que a massa contida dentro de uma caixa fechada é conservada.

3.4 Fluido Perfeito

Um fluido perfeito não tem condução de calor e viscosidade. Se você deseja construir modelos para discos de acréscimo sobre buracos negros ou estrelas de nêutrons, esta aproximação é muito ruim: deve-se escolher um fluido mais realístico.

O **tensor energia-momento** de um fluido perfeito é:

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Considerando-se que: $\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$ pode-se deduzir que: $T^a{}_b = diag(-\rho, P, P, P)$ e nós podemos proceder a calcular o tensor: $G^a{}_b$ também.

Este tensor também pode ser escrito como:

$$T_{ab} = \rho U_a U_b + P\left(\eta_{ab} + U_a U_b\right) \tag{3.15}$$

onde: U_a é o 4-vetor tipo-tempo de um elemento do fluido.

Então, ρ e P são a densidade de energia e a pressão como medidos no referencial de repouso.

Se nenhuma forą externa atua sobre este fluido, a lei de conservação vale:

$$\partial^a T_{ab} = 0 \tag{3.16}$$

Com o objetivo de deduzir as leis de conservação, nós iremos precisar de dois critérios:

$$U^a U_a = -1 \tag{3.17}$$

e:

$$U^a \partial_a U^b = 0 \tag{3.18}$$

A primeira segue-se de:

$$ds^2 = -d\tau^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b = dX_b dX^b \tag{3.19}$$

$$-1 = \frac{dX_b}{d\tau}\frac{dX^b}{d\tau} \tag{3.20}$$

A segunda é a exigência de que a partícula-livre siga uma geodésica. Usando os critérios acima, é fácil deduzir que:

$$U^a \partial_a \rho + (\rho + P)\, \partial^a U_a = 0 \tag{3.21a}$$

$$(P + \rho) U^a \partial_a U_b + (\eta_{ab} + U_a U_b)\, \partial^a P = 0 \tag{3.21b}$$

no limite não-relativístico $P << \rho$, $U^a = (1, \vec{V})$, estas equações se tornam as familiares equações de conservação dos fluidos: continuidade e a equação de Euler.

Agora, a equação: $\partial^a T_{ab} = 0$ tem uma interpretação relevante: considere uma família de observadores inerciais com 4-velocidade V^a. A quantidade:

$$J_a = -T_{ab} V^b \tag{3.22}$$

é a densidade de corrente de massa-energia do fluido, como medida pelos observadores com 4-velocidade V^a. A conservação implica que (não há forças externas sobre o fluido: $\partial_b V^a = 0$):

$$\partial^a J_a = 0 \tag{3.23}$$

Usando-se a lei de Gauss pode-se integrá-la sobre o volume 3D: $(t = cte)$ $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega d\Omega\, (\partial^a J_a) = \\ &= \int_\Omega d\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^i J_i\right] = \\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega d\Omega \rho + \int_\Omega d\Omega \nabla^i J_i = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando a lei de Gauss:

$$\frac{dE}{dt} + \int_{\partial\Omega} dSn^i J_i = 0 \tag{3.25}$$

se não existe corrente de energia (fluxo) através do contorno $\partial\Omega$, a última integral acima é zero, e nós podemos concluir que a energia total encerrada em $\partial\Omega$ é conservada.

Portanto, isto resulta na **lei de conservação de energia**. Aqui: n^i é normal à superfície dS.

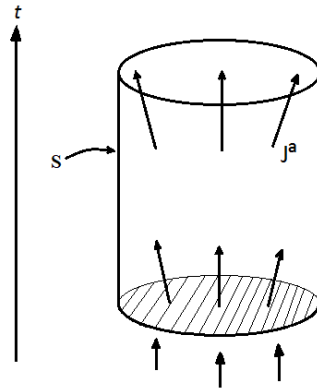



Figure 3.2: um diagrama mostrando o 4-vetor: J^a

Na próxima seça ao nós usamos o fluido perfeito como uma descrição para o conteúdo de matéria em um modelo cosmológico (isotrópico e homogêneo) e usamos o Maple para extrair as equações de Robertson-Walker.

3.5 Uma aplicação do fluido perfeito

O modelo de Friedmann-Robertson-Walker é baseado em uma métrica diagonal, levando a um tensor $G^a{}_b$ também diagonal. Vamos resolver as equações de Einstein para este modelo, usando o programa Maple 2016.

A figura seguinte mostra o elemento de linha que é carregado em uma planilha Maple, após digitarmos o comando: **M1> with(Physics);**. Digite a expressão acima no grupo de execução M1 e pressione ENTER logo após:

M1 > $g := evalDG\left(-dt \,\&t\, dt + \frac{(a^2(t))}{1 - K \cdot r^2} * dr \,\&t\, dr + \frac{a^2(t)}{1} * r\verb|^|2 * dtheta \,\&t\, dtheta + \frac{a^2(t)}{1} * r^2 * \sin(\theta)\verb|^|2 * dphi \,\&t\, dphi\right);$

$$g := -(dt\, dt) - \left(\frac{a(t)^2\, dr}{K r^2 - 1}\, dr\right) + \left(a(t)^2 r^2\, dtheta\right) dtheta + \left(a(t)^2 r^2 \sin(\theta)^2\, dphi\right) dphi$$

Figure 3.3: carregando a métrica

Esta expressão corresponde ao elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a(t)^2}{1 - Kr^2} dr^2 + a(t)^2 d\Omega^2 \tag{3.26}$$

com: $d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta) d\phi^2$.

Em seguida, calcule o tensor de Einstein (usando EinteinTensor(g)) e logo após, levante o segundo índice (usando RaiseLowerIndices(g,Ein,[2]):

M1 > $Ein := EinsteinTensor(g);$

$$Ein := \frac{3\left(\dot{a}(t)^2 + K\right) D_t}{a(t)^2} D_t + \frac{\left(K r^2 - 1\right)\left(2\, a(t)\, \ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + K\right) D_r}{a(t)^4} D_r - \left(\frac{\left(2\, a(t)\, \ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + K\right) D_theta}{a(t)^4 r^2} D_theta\right) + \frac{\left(-2\, a(t)\, \ddot{a}(t) - \dot{a}(t)^2 - K\right) D_phi}{a(t)^4 r^2 \sin(\theta)^2} D_phi$$

M1 >

M1 > $E := RaiseLowerIndices(g, Ein, [2]);$

$$E := -\left(\frac{3\left(\dot{a}(t)^2 + K\right) D_t}{a(t)^2} dt\right) - \left(\frac{\left(2\, a(t)\, \ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + K\right) D_r}{a(t)^2} dr\right) - \left(\frac{\left(2\, a(t)\, \ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + K\right) D_theta}{a(t)^2} dtheta\right) + \frac{\left(-2\, a(t)\, \ddot{a}(t) - \dot{a}(t)^2 - K\right) D_phi}{a(t)^2} dphi$$

Figure 3.4: levante o segundo índice

Agora, separe as componentes e considere que: $G^a{}_b = -8\pi T^a{}_b$ com: $T^a{}_b = diag\,(-\rho, P, P, P)$.

Logo, a matéria-energia que nós assumimos aqui é aquela de fluido perfeito como definida na seção prévia.

M1 > $EEq := DGinfo(E, \text{"CoefficientSet"});$

$$EEq := \left\{ \frac{-2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 - K}{a(t)^2},\ -\frac{3\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K\right)}{a(t)^2},\ -\frac{2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K}{a(t)^2} \right\}$$

M1 >

M1 >

M1 > $eq1 := -\frac{3\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K\right)}{a(t)^2} + 8\cdot\pi\cdot\rho = 0;\ eq2 := -\frac{2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K}{a(t)^2} + 8\cdot\pi\cdot P = 0;$

$$eq1 := -\frac{3\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K\right)}{a(t)^2} + 8\,\pi\,\rho = 0$$

$$eq2 := -\frac{2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + K}{a(t)^2} + 8\,\pi\,P = 0$$

Figure 3.5: separando as componentes

Nos últimos passos acima, nós copiamos e colamos as componentes em outro grupo de execução do Maple, gerando duas novas equações que completam o modelo FRW para um universo de curvatura K. A partir de agora, você deve escolher uma equação de estado, (uma relação entre $P = P(\rho)$, e considerar a dependência destas funções com o fator de escala $a(t)$).

Não iremos fazê-lo aqui, para não fugirmos ao escopo do nosso curso e livro, mas a planilha Maple acima tem todos os ingredientes para estudarmos modelos cosmológicos.

As equações obtidas do Maple, acima, são as equações de Robertson-Walker para um universo homogêneo e isotrópico:

$$3\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right]^2 + \frac{K}{a^2(t)} - 8\pi\rho(t) = 0 \tag{3.27a}$$

$$\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right]^2 + \frac{K}{a^2(t)} + 8\pi P(t) = 0 \tag{3.27b}$$

$$P = P(\rho) \tag{3.27c}$$

$$a(0) = a_i \tag{3.27d}$$

onde: $K = +1, 0, -1$ são os possíveis valores da curvatura K, e a última condição estabelece as condições iniciais sobre o fator de escala: $a(t)$.

Para resolver estas equações, deve-se inserir a equação de estado: $P = P(\rho)$ e assumir a dependência $\rho = \rho(a)$ em termos do fator de escala. Se a componente é matéria, $\rho \propto a^{-3}$, radiação térmica é: $\rho \propto a^{-4}$ e assim por diante. Não se esqueça das condições iniciais: $a(0) = 0$ ou outro valor.

Alguns pontos importantes aqui: 1) fique atento à assinatura que foi assumida para a métrica: $(-1, 1, 1, 1)$ ou $(1, -1, -1, -1)$.

2) Remova os fatores de coordenada que surgem quando você trabalha com G^{ab} or G_{ab} (veja o fator: $\frac{1}{sin^2(\theta)}$, ele deve ser removido ou cancelado pelo mesmo fator que deve aparecer do lado direito: T_{ab}).

Quando você levanta ou abaixa índices de G_{ab}, G^{ab} e usa uma forma simplificada de T^a_b você obtém rapidamente as equações corretas com auxílio de computadores e algumas ferramentas são: Maple, Mathematica e assim por diante. Iremos trabalhar com o formalismo de Cartan, nas próximas seções, pois é muito importante conhecer como resolver as equações de Einstein manualmente.

3.6 Campos Eletromagnéticos e Escalares

A descrição de fluido ou poeira acima foram fenomenológicas. No entanto, a natureza providencia campos que preenchem o espaço-tempo e que fazem acomplamento com a gravidade. Tais campos devem ter tensor energia-momento T_{ab} que os descreva, e tal tensor pode ser calculado através de primeiros princípios, usando-se o formalismo Lagrangeano.

A formulação Lagrangeana começa com um campo como o seu ingrediente fundamental. Ele pode ser escalar, vetorial, tensorial ou mesmo spinorial. O campo é uma função que preenche o espaço-tempo e propaga interações com algumas partículas (outras não). Campos possuem energia, momento, momento angular e as excitações dele são interpretadas como partículas (quanta) deste campo. Como exemplos de campos temos: o campo eletromagnético, o campo gravitacional, o campo de Higgs, etc.

Campos possuem algumas simetrias internas e contínuas também, associadas a quantidades conservadas tais como energia, momento e momento angular. A teoria clássica de campos é o formalismo que descreve as equações satisfeitas por esses campos, suas interações e quantidades conservadas.

Este formalismo começa com um funcional dos campos, denominada densidade Lagrangena L, ou simplesmente Lagrangeana.

A Lagrangeana está associada a uma integral, denominada ação. O Princípio de Mínima Ação estabelece que as equações de campo são as equações que irão minimizar o valor real da ação entre duas 'superfícies' com condições de contorno e iniciais fixadas.

A ação é dada por:

$$S = \int_\Omega d^4X \sqrt{-g(X)} L(\varphi, D_a\varphi) \tag{3.28}$$

onde Ω é um subconjunto da variedade do espaço-tempo onde nós consideramos a variação δS, $\sqrt{-g(X)}$ é necessário pois o elemento de volume é uma densidade escalar com peso +1 e $\sqrt{-g(X)}L$ é uma densidade escalar de peso -1, de tal modo que a integral é invariante sob um boost de Lorenz (or more general transformations).

A condição para isto é que a densidade escalar tenha peso total zero, e os pesos acima se somam fornecendo zero. O peso de uma densidade escalar é a **potência** que aparece no fator determinante da matriz Jacobiana da transformação de coordenadas, logo, uma densidade escalar ρ de peso +1 se transforma como:

$$\rho^{'}(X^{'}) = J(X^{'}, X)^{peso=1}\rho(X)$$

onde $J(X^{'}, X)$ é o determinante da matriz Jacobiana.

Densidades tensoriais de peso arbitrário também são definidas, de modo análogo ao que foi feito acima.

Com o objetivo de evitarmos as complexidades das variedades curvas, vamos nos restringir à variedade plana M^4, o espaço-tempo de Minkoski onde: $\sqrt{-g(X)} = 1$, logo, a derivada é simplesmente: $\partial_a \varphi$.

O **Princípio de Mínima Ação** é escrito como:

$$\delta S = 0 \tag{3.29}$$

o que nos leva facilmente às **equações de Euler-Lagrange**:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) - \partial_a \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_a \varphi}\right) = 0 \tag{3.30}$$

Para obtê-las use a integração por partes e não se esqueça de que o contorno $\delta\Omega$ da variedade tem valores fixos para os campos e suas derivadas (condições de contorno). A obtenção destas equações segue o mesmo procedimento que é aplicado na dedução das equações de Euler-Lagrange na Mecânica Clássica. Note que a forma das equações depende da forma funcional entre L e os campos: $L = L(\varphi, \partial\varphi)$. Formas funcionais mais complexas irão levar a equações de campo mais complexas.

A novidade aqui é: o campo gravitacional possui a sua Lagrangeana, logo, podemos obter as equações de Einstein seguindo a formulação do princípio variacional que acima foi definido.

Mas antes disso, vamos escolher alguns exemplos mais elementares de $L = L(\varphi, \partial\varphi)$ e determinar as suas equações de campo?

Exemplo: Obtenha as equações de Euler-Lagrange a partir da Lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \tag{3.31}$$

Solução:
Inserindo a função acima, nas eqs.(3.30) obtém-se imediatamente:

$$\partial_a\partial^a\varphi - m\varphi = 0 \tag{3.32}$$

Esta é a equação de campo de um campo escalar, a partir da Lagrangeana que o define. Agora, a questão é: esses objetos possuem outras características, tais como energia, momento e momento angular? O Teorema de Noether é um poderoso teorema da disciplina de campos clássicos que assegura a existência de cargas conservadas associadas a toda e qualquer simetria contínua encontrada na Lagrangeana que descreve o campo. Então, se uma Lagrangeana possui simetria temporal, haverá uma carga conservada associada a esta simetria, no caso, a energia, e assim por diante.

As simetrias contínuas associadas às translações no espaço-tempo permitem-nos definir um tensor, chamado tensor energia-momento.

O tensor $T^a{}_b$ de um campo clássico é definido pela quantidade:

$$T^a{}_b = \partial_b\varphi\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_a\varphi}\right) - \delta^a{}_b L \tag{3.33}$$

Desta forma, obtivemos uma prescrição para obter o tensor energia-momento de sistemas mais complexos, envolvendo campos, e a partir disto, podemos considerar a contribuição desses campos ao campo gravitacional e considerar este último como passível de ser descrito usando o mesmo formalismo.

Finalmente, com o objetivo de considerar a métrica, nós usamos a prescrição do **acomplamento minínimo**: nós obtemos as equações corretas se: $\partial_a \to D_a$ e $\eta_{ab} \to g_{ab}$. Então, usando este princípio, o tensor de energia-momento pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
&\partial_a \to D_a : \\
&\eta_{ab} \to g_{ab} : \\
&T_{ab} = D_a\varphi\left(\frac{\partial L}{\partial D^b\varphi}\right) - g_{ab}L
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e a métrica entra no segundo termo (e D_a é a derivada covariante). Agora, nós apresentamos dois exemplos de T_{ab}: campo eletromagnético e fluido real.

O tensor **energia-momento do campo eletromagnético** no espaço-tempo curvo é:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b^c - \frac{g_{ab}}{4}F^{cd}.F_{cd}\right) \tag{3.35}$$

e as equações de campo são dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= -4\pi J_b \\ \nabla_{[a}F_{bc]} &= 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde: $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$ é o tensor de Maxwell e A_a é o potencial vetor descrevendo campos eletromagnéticos.

Nós devemos ser cuidadosos com o **acoplamento mínimo**: $\eta_{ab} \to g_{ab}$ e $\partial_a \to \nabla_a$: esta prescrição não é única.

As equações de Maxwell no gauge de Lorentz contêm um termo com a curvatura, e este termo não surge usando o acoplamento mínimo do modo como foi feito acima. Nós convidamos o leitor a verificar mais detalhes em R.Wald [2], página 71.

O tensor T_{ab} acima pode ser deduzido de primeiros princípios se a Lagrangeana do campo eletromagnético é conhecida, veja por exemplo: Landau [ ].

Finalmente, fluidos com shear, condutividade e calor possuem tensor T_{ab}:

$$T^{ab} = \rho\,(1+\epsilon)\,U^a U^b + (P - \zeta\theta)\,h^{ab} - 2\eta\sigma^{ab} + q^a U^b + q^b U^a \tag{3.37}$$

Este tensor pode descrever um disco com acréscimo em torno de uma estrela compacta: anã-branca, estrela de nêutrons ou um buraco negro.

Um fluido perfeito não é uma boa aproximação aqui, desde que os novos fatores são responsíveis à conversão da energia potencial no calor e a radiação observada do disco.

3.7 Vetores de Killing

O teorema de Noether afirma que simetrias contínuas levam a **Leis de Conservação**. Para cada simetria contínua encontrada na Lagrangeana encontramos uma quantidade conservada (energia, momento angular, etc).

Geometricamente falando, uma simetria oculta o fato de que a métrica é a mesma ponto a ponto (seguindo a simetria).

Agora, levantamos a seguinte questão: como podemos encontrar as simetrias em Relatividade? Aqui, nós podemos identificar uma simetria descobrindo as direções onde a métrica permanece a mesma. Isto define a simetria.

Nosso objetivo é descobrir as direções onde a métrica permanece a mesma: essas direções são dadas pelos vetores de Killing.

Um vetor de Killing satisfaz à **equação de Killing** , a qual é determinada pelas derivadas covariantes como:

$$\nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0 \tag{3.38}$$

e a versão contravariante também vale.

Se U é um campo vetorial e nós escolhemos um conjunto de pontos que é deslocado por $U^b dx^b$ e todas as relações de distância permanecem as mesmas, então U é um vetor de Killing.

Este tipo de aplicação que preserva distância é conhecida pelo nome de isometria. A métrica não muda ao longo das direções que correspondem ao vetor de Killing. Como consequência ela leva a quantidades conservadas como energia, momento linear e momento angular. Além disso, uma partícula movendo-se na direção onde uma métrica não muda não irá sentir quaisquer forças, ela será uma partícula livre e seu momento linear será conservado.

Agora, nós iremos mostrar que: se $\nabla_b g_{cd} = 0$ então: $L_X g_{ab} = 0$ implica a equação de Killing para X. É fácil mostrar que:

$$\begin{aligned} & L_X g_{ab} = 0 \rightarrow \\ & = X^b \partial_b g_{ab} + g_{ac} \partial_b X^c + g_{bc} \partial_a X^c = \\ & = X^b \nabla_b g_{ab} + g_{ac} \nabla_b X^c + g_{bc} \nabla_a X^c = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

mas: $\nabla_b g_{ab} = 0$, então:

$$L_X g_{ab} = g_{ac} \nabla_b X^c + g_{bc} \nabla_a X^c = \nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 0 \tag{3.40}$$

e a última é a equação de Killing para X.

No último passo nós podemos introduzir a métrica dentro do operador, uma vez que este será nulo como se supõe. Agora, vamos encontrar uma relação útil entre vetores de Killing e os objetos geométricos definidos dentro da Relatividade Geral.

Exercício: Se X é um vetor de Killing vector, pode-se provar que:

$$\nabla_c \nabla_b X^a = R^a{}_{bcd} X^d \tag{3.41}$$

$$\nabla_b \nabla_a X^b = R_{ac} X^c \tag{3.42}$$

$$X^a \nabla_a R = 0 \tag{3.43}$$

Para provar a eq.(3.39) use a identidade: $R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0$, o fato: $\nabla_a X_b = -\nabla_b X_a$ (X é um vetor de Killing) e a definição do tensor de Riemann: $\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_a X_c = -R_{abcd} X^d$.

Portanto, usando que X é Killing, pode-se escrever:

$$\nabla_a \nabla_b X_c + \nabla_b \nabla_c X_a = -R_{abcd} X^d \tag{3.44}$$

Então, nós escrevemos agora:

$$-\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_c X_a = R_{abcd} X^d \tag{3.45a}$$

$$-\nabla_b \nabla_c X_a - \nabla_c \nabla_a X_b = R_{bcad} X^d \tag{3.45b}$$

$$\nabla_c \nabla_a X_b + \nabla_a \nabla_b X_c = -R_{cabd} X^d \tag{3.45c}$$

Resumindo, o lado esquerdo cancela alguns termos e nós obtemos:

$$-2\nabla_b \nabla_c X_a = -2R_{cabd} X^d \tag{3.46}$$

Portanto: $\nabla_b \nabla_c X_a = R_{cabd} X^d = R_{cab}{}^d X_d$.

O lado direito usa: $R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} = 0$ o que implica: $R_{abcd} + R_{bcad} = -R_{cabd}$ using the identity: $R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0$. Portanto: $R_{abcd} + R_{bcad} - R_{cabd} = -2R_{cabd}$ e nós o inserimos no lado direito acima. As eqs.(3.40) e (3.41) são imediatas a partir daqui, então obtemos:

$$\nabla_b \nabla_c X_a = R_{cab}{}^d X_d \tag{3.47a}$$

$$\nabla_c \nabla_b X^a = R^a{}_{bcd} X^d \tag{3.47b}$$

Na próxima seção nós enfatizamos a relação entre os vetores de Killing, correntes conservadas e suas cargas.

3.8 Correntes conservadas

Considere a contração de T^{ab} e um vetor de Killing X_b:

$$J^a = T^{ab} X_b \tag{3.48}$$

Se aplicarmos a derivada covariante:

$$\nabla_a J^a = \nabla_a (T^{ab}) X_b + T^{ab} \nabla_a X_b \tag{3.49}$$

Se T^{ab} é localmente conservada, então $\nabla_a T^{ab} = 0$ e:

$$\nabla_a J^a = \frac{\left(T^{ab}\nabla_a X_b + T^{ba}\nabla_b X_a\right)}{2} = \tag{3.50}$$

$$= \frac{T^{ab}}{2}\left[\nabla_a X_b + \nabla_b X_a\right] \tag{3.51}$$

Mas agora, se nós escolhermos X como um vetor de Killing,a expressão acima torna-se nula, e portanto:

$$\nabla_a J^a = 0 \tag{3.52}$$

e J^a é uma corrente conservada!

Agora, dado um vetor de Killing, podemos construir uma corrente conservada. Seja X_b um vetor de Killing, então:

$$\nabla_{(a}X_{b)} = \nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0 \tag{3.53}$$

Vamos definir o tensor anti-simétrico $(0,2)$ como uma 2-forma:

$$f_{ab} = \nabla_a X_b \tag{3.54}$$

ele é anti-simétrico devido à condição de Killing. Isto nos permite definir uma corrente conservada dada por:

$$J_b = \nabla^a f_{ab} \tag{3.55}$$

Ela é conservada pois:

$$\nabla^b J_b = \nabla^b \nabla^a f_{ab} \tag{3.56}$$

e a contração de qualquer tensor anti-simétrico com um simétrico é nula. Portanto, nós obtemos:

$$J_a = \nabla^b \nabla_b X^a = R_{ab} X^b \tag{3.57}$$

A prova é simples:

$$\begin{aligned}
&\nabla_b \nabla_a X^b = R_{ac} X^c \rightarrow \\
&\nabla^b \nabla_a X_b = R_{ac} X^c \rightarrow \\
&-\nabla_b \nabla_b X^a = R_{ac} X^c \rightarrow \\
&+\nabla^a f_{ab} = R_{ac} X^c
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde na última, nós usamos que X é um vetor de Killing.

Mas: $J_a = \nabla^b f_{ab}$, portanto:

$$J_a = R_{ac} X^c \tag{3.59}$$

Então, existe uma relação entre o tensor de Ricci, uma corrente conservada e o vetor de Killing X.

Uma vez que J_a é uma corrente conservada, podemos aplicar o Teorema de Gauss e definir uma constante e_X:

$$e_X = \int_\Omega dV J_b V^a = \int_{\partial\Omega} dS n^b \left(\nabla_a X_b V^a\right) \tag{3.60}$$

Desta forma, o vetor de Killing tem uma quantidade conservada associada. Mas, as equações de Einstein implicam que:

$$R_{ab} = -8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T\right) \tag{3.61}$$

Vamos definir a quantidade:

$$E = \alpha e_X = -8\pi\alpha \int_{\partial\Omega} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T\right) X^a V^b dV \tag{3.62}$$

Na aproximação Newtoniana nós escolhemos para: $X^a = V^a$, o 4-vetor velocidade do fluido, e para a matéria usamos pó: $T_{ab} = \rho V_a V_b$.

O integrando é:

$$\begin{aligned} &\left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T\right) = \\ &= \rho V^a V_a V^b V_b + \frac{\rho}{2} V_b V^b \end{aligned} \tag{3.63}$$

mas, lembre-se que: $V^a V_a = -1$ e usamos: $T = T^a_a = -\rho$, então iremos obter:

$$= \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \tag{3.64}$$

Inserindo na integral eq.(3.60) e considerando que a energia E deve ser:

$$E = \int \rho dV \tag{3.65}$$

nós obtemos: $\alpha = -\frac{1}{4\pi}$.

Nós voltamos à definição geral e podemos considerar que: dado um espaço-tempo com vetores de Killing normalizados X^a, sua energia total

pode ser dada por (é interessante notar que a pressão contribui à massa se usarmos outro T_{ab}, com mais termos, por exemplo um fluido):

$$E = -\frac{1}{4\pi} \int_S dS \left(\nabla_a X_b V^a n^b \right) \tag{3.66}$$

onde: S é uma superfície tipo-espaço circundando a fonte de energia. Uma definição similar pode ser aplicada ao momento angular se X_a é um vetor de Killing com simetria axial! V^a é tipo-tempo e n^b é normal e tipo-espaço (ambos com norma unitária).

Desta forma, a energia em Relatividade Geral é bem definida se e somente se o espaço-tempo é globalmente assintoticamente plano (para que uma superfície fechada S possa ser definida) com simetrias fornecidas pelos vetores de Killing correspondentes.

Se estudarmos a métrica de Schwarzschild, o parâmetro M é a massa **como medida por um observador remoto**. Para esta quantidade ser bem definida supomos que a o espaço seja assintoticamente plano. Sem esta suposição, não podemos definir um observador assintótico. Note que este parâmetro aparece no primeiro termo do elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + ... \tag{3.67}$$

e t é o **tempo aparente** (não é o tempo-próprio) como medido por um observador remoto $r >> 2M$. O objeto pode ser um Buraco Negro (sem rotação e carga).

3.9 Condições sobre a Energia

Para finalizar este importante capítulo, nós devemos discutir as condições sobre a energia. A métrica do espaço-tempo deve satisfazer às equações de Einstein como nós vimos nas seções prévias. A questão que surge é: podemos escolher qualquer métrica, desde que ela satisfaça às equações de Einstein? As condições sobre a energia limitam a forma que o tensor T_{ab} pode apresentar.

Esses vínculos são conhecidos como condições de energia (ou condições sobre a energia). Lembre-se que T_{00} é a densidade de energia de um fluido como medido por um observador inercial. Esta componente deve ser positivo-definida para qualquer observador, então, este vínculo é conhecido como: Condição Fraca de Energia:

$$T_{ab} W^a W^b \geq 0 \tag{3.68}$$

para qualquer vetor tipo-tempo. Vamos escolher um vetor: $W^a = (-1, 0, 0, 0)$. Escolhendo-se um fluido perfeito temos: $T_{ab} = diag\,(\rho, P, P, P)$.

O vínculo com o vetor acima nos leva a (contração):

$$diag(\rho, P, P, P).(-1, 0, 0, 0).(-1, 0, 0, 0) = \rho \geq 0 \qquad (3.69)$$

Então, um vínculo razoável foi obtido. Deste modo, nós consideramos um espaço-tempo fisicamente razoável como aquele dado por um elemento de linha onde o tensor g_{ab} satisfaça às equações de Einstein e as condições sobre a energia sejam satisfeitas:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} R = 8\pi T_{ab} \qquad (3.70a)$$

$$T_{ab} W^a W^b \geq 0 \qquad (3.70b)$$

para qualquer vetor tipo-tempo W^a definido por um observador inercial. Adicionalmente, S.Hawking e R.Penrose nos anos 70 propuseram alguns outros vínculos: o espaço-tempo não pode admitir **curvas tipo-tempo fechadas CTCs** (curvas que apontam ao passado, violando a causalidade).

Estas condições são essenciais para estabelecer soluções fisicamente viáveis descrevendo buracos negros ou modelos cosmológicos, aqui, remetemos o leitor a R.Penrose em [8] para mais detalhes e S.Hawking and G.Ellis [9].

Chapter 4

As Equações de Estrutura de Cartan

4.1 Bases local e coordenada

Uma **base coordenada** é onde vetores de base são: $e_a = \frac{\partial}{\partial X^a}$. Na maioria dos casos, uma base coordenada não é ortonormal. É possível calcular todas as quantidades, usando tais bases, mas este não é o modo mais fácil de abordar um problema físico. Então, antes de calcularms tensores e todas as outras quantidades, é muito útil escolher uma base ortonormal. Esta base está relacionada ao referencial local do observador e a base coordenada é o sistema de referência global.

Se X^a são coordenadas, os **vetores da base** e as **1-formas** são:

$$e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial X^a} \tag{4.1a}$$

$$\omega^a = dX^a \tag{4.1b}$$

Quando uma base é definida através das derivadas das coordenadas nós a denominamos base coordenada ou base holonômica.

Um vetor pode ser expandido em qualquer base, holonômica ou não de acordo com:

$$U = U^a e_a = U^{\hat{a}} e_{\hat{a}} \tag{4.2}$$

onde o índice **hat** denota o referencial não-holonômico.

Examplo: em coordenadas polares nós escrevemos a métrica como:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{4.3}$$

Os vetores de base são:

$$e_r = \partial_r \tag{4.4a}$$
$$e_\theta = \partial_\theta \tag{4.4b}$$
$$e_\phi = \partial_\phi \tag{4.4c}$$

Mas, esses vetores não são unitários e as dimensões são inconsistentes. Em uma base coordenada nós escrevemos:

$$g_{ab} = e_a.e_b \tag{4.5}$$

Mas esta métrica pode ser representada pela matriz:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Portanto, esta matriz permite concluir que:

$$e_r.e_r = 1 \rightarrow |e_r| = 1 \tag{4.7a}$$
$$e_\theta.e_\theta = r^2 \rightarrow |e_\theta| = r \tag{4.7b}$$
$$e_\phi.e_\phi = r^2 sin^2(\theta) \rightarrow |e_\phi| = rsin(\theta) \tag{4.7c}$$

Para escolher uma base que é ortonormal, nós a construímos de modo que:

$$g(e_{\hat{a}}, e_{\hat{b}}) = \eta_{\hat{a}\hat{b}} \tag{4.8}$$

Uma base definida deste modo é conhecida como base não-holonômica.

4.2 Bases não-holonômicas

Uma base não-holonômica é aquela tal que os vetores de base são ortonormais com relação à métrica escolhida.

Alguns autores a denominam tetrada ortonormal. Tal base é usada por um observador físico e está ligada ao referencial de Lorentz local, por sua vez, a base coordenada expressa o espaço-tempo global. Desta forma, podemos expressar um vetor em ambas as bases. Na ortonormal, nós temos:

$$U = U^{\hat{a}} e_{\hat{a}} \tag{4.9}$$

Com o objetivo de manter uma notação uniforme, iremos escrever:

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}} = e_{\hat{a}}.e_{\hat{b}} \tag{4.10}$$

com: $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = diag\,(1,-1,-1,-1)$.
Então, é muito fácil mostrar que a nova base é dada por:

$$e_{\hat{r}} = \partial_r \tag{4.11a}$$

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{\partial_\theta}{r} \tag{4.11b}$$

$$e_{\hat{\phi}} = \frac{\partial_\phi}{rsin(\theta)} \tag{4.11c}$$

A próxima questão é verificar se a base é holonômica ou não.

4.3 Coeficientes de Commutação

O comutador é definido por:

$$[A, B] = AB - BA \tag{4.12}$$

se A, B são operadores não comutativos, o comutador será não-nulo.
Vamos aplicar este princípio à base: $e_{\hat{a}}$:

$$\begin{aligned}
[e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}]\, f &= \left[\partial_r, \frac{1}{r}\partial\theta\right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \\
&= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

O resultado acima convida a definir:

$$[e_a, e_b] = C^c{}_{ab} e_c \tag{4.14}$$

As quantidades: $C^c{}_{ab}$ são os coeficientes de comutação. . Se esses valores são nulos para todos os a, b, c a correspondente base é holonômica.

Nós podemos fazer a análise usando a base de 1-formas também.

Uma 1-forma σ pode ser expandida em termos de um conjunto de 1-formas da base coordenada ω^a como:

$$\sigma = \sigma_a \omega^a = \sigma_a dX^a \tag{4.15}$$

Do mesmo modo, podemos expandir a 1-forma em termos de uma base não holonômica:

$$\sigma = \sigma_{\hat{a}} \omega^{\hat{a}} \tag{4.16}$$

Dado um conjunto de 1-formas de base: $\omega^{\hat{a}}$ os coeficientes de comutação: $C^a{}_{bc}$ podem ser obtidos da derivada exterior: $d\omega^{\hat{a}}$.

Portanto, temos:

$$d\omega^a = -\frac{C^a{}_{bc}}{2} \omega^b \wedge \omega^c \tag{4.17}$$

Se a base é coordenada, então $\omega^a = dX^a$ e portanto: $d\omega = 0$ desde que $ddX^a = 0$.

Portanto, em uma base coordenada os coeficientes de comutação são todos nulos.

Exemplo: Calcule os coeficientes de comutação para a base:

$$\omega^{\hat{r}} = dr \tag{4.18a}$$

$$\omega^{\hat{\theta}} = r d\theta \tag{4.18b}$$

$$\omega^{\hat{\phi}} = r sin(\theta) d\phi \tag{4.18c}$$

Solução:

Vamos calcular algumas derivadas exteriores, escolha:

$$\begin{aligned} d\omega^{\hat{\phi}} &= d\left(r sin(\theta) d\phi\right) = \\ &= \frac{1}{r} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + \frac{cotg(\theta)}{r} \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mas isto é dado também por:

$$= \left[-\frac{C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}}}{2} + \frac{C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}}}{2} \right] \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\phi} + \left[-\frac{C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}}{2} + \frac{C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}}}{2} \right] \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \tag{4.20}$$

Usando as simetrias dos coeficientes podemos simplificá-lo para:

$$= \left[-C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} \right] \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\phi} - \left[C^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} \right] \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \tag{4.21}$$

uma simples comparação leva a:

$$C^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} \tag{4.22a}$$

$$C^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\frac{cotg(\theta)}{r} \tag{4.22b}$$

Agora, $\omega^{\hat{\theta}} = rd\theta$ então:

$$\begin{aligned} d(\omega^{\hat{\theta}}) &= dr \wedge d\theta = \omega^{\hat{r}} \wedge \frac{1}{r}\omega^{\hat{\theta}} \\ &= -C^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}}\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

A partir da qual pode-se extrair:

$$-\,C^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \tag{4.24}$$

os outros coeficiente de comutação são nulos, como é fácil deduzir.

4.4 Primeira Equação de Estrutura de Cartan

O primeiro passo ao calcular a curvatura é encontrar as 1-formas de curvatura e os coeficientes de rotação de Ricci.

Nós começamos das **1-formas** Θ^a ao invés de $\omega^{\hat{a}}$. Não iremos usar o 'chapéu' pois estamos na base não-coordenada e a notação fica mais limpa.

Com o objetivo de calcular os coeficientes de rotação de Ricci nós devemos calcular a derivada exterior das 1-formas.

As **1-formas de curvatura** são $\Gamma^a{}_b$ (eles não são os coeficientes da conexão, embora haja uma relação entre eles).

As **1-formas de curvatura** são definidas por:

$$d\Theta^a = -\Gamma^a{}_b \wedge \Theta^b \tag{4.25}$$

onde foi calculada a derivada exterior.

Os **coeficientes de rotação de Ricci** $\Gamma^a{}_{bc}$ surgem como uma expansão dos primeiros, em termos da base:

$$\Gamma^a{}_b = \Gamma^a{}_{bc}\Theta^c \tag{4.26}$$

Algumas simetrias são úteis em cálculos futuros:

$$\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba} \quad (4.27a)$$
$$\Gamma^0_i = \Gamma^i_0 \quad (4.27b)$$
$$\Gamma^i_j = -\Gamma^j_i \quad (4.27c)$$

onde i, j são índices.

Nos cálculos iremos usar a álgebra das formas diferenciais: $dd\alpha = 0$ e $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ e as simetrias são extraídas de: $\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$.

Com o objetivo de escolher a base não-coordenada Θ^a calculamos um exemplo:

Exemplo: Determine a base não-coordenada a métrica diagonal:

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + B^2(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta)d\phi^2 \quad (4.28)$$

Solução: a base não coordenada é:

$$\Theta^t = A(t)dt \quad (4.29a)$$
$$\Theta^r = B(r)dr \quad (4.29b)$$
$$\Theta^\theta = rd\theta \quad (4.29c)$$
$$\Theta^\phi = rsin(\theta)d\phi \quad (4.29d)$$

Então, é suficiente uma leitura direta do elemento de linha.

4.5 Segunda equação de estrutura de Cartan

Agora, para extrair o tensor de curvatura de Riemann ós usamos a segunda equação de estrutura de Cartan:

$$\Omega^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_e \wedge \Gamma^e{}_b \quad (4.30a)$$
$$\Omega^a{}_b = \frac{R^a{}_{bcd}}{2} \Theta^c \wedge \Theta^d \quad (4.30b)$$

onde $\Gamma^a{}_b$ são as 1-formas de curvatura que foram calculadas usando a derivada exterior sobre a base de 1-formas que foi escolhida. O que ganhamos com isso?

A álgebra introduzida e as propriedades da derivada exterior evitam a obtenção de termos não nulos nas equações (eles já são eliminados na própria

álgebra, digamos assim), e as simetrias reduzem o número de equações envolvidas. Em outras palavras, o cálculo da curvatura é mais eficiente e limpo do que em outras abordagens. No próximo capítulo nós iremos aplicar essas ideias a uma métrica muito importante, aquela que descreve uma massa em um espaço-tempo vazio e assintoticamente plano.

Chapter 5

Aplicando o formalismo de Cartan

5.1 Deduzindo o espaço-tempo de uma estrela esférica

5.1.1 Primeira equação de Cartan

A pesquisa moderna usa métodos modernos e a Relatividade Geral não é exceção. Nesta monografia nós deduzimos o elemento de linha de Schwarzschild usando o formalismo de Cartan e a abordagem canônica (tensores apenas) é deixado para o capítulo 11.

Considere o elemento de linha esfericamente simétrico e independente do tempo:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{5.1}$$

nós extraímos as 1-formas, fazendo a leitura do elemento de linha:

$$\Theta^0 = e^{\Phi}dt \tag{5.2a}$$

$$\Theta^1 = e^{\lambda}dr \tag{5.2b}$$

$$\Theta^2 = rd\theta \tag{5.2c}$$

$$\Theta^3 = rsin(\theta)d\Phi \tag{5.2d}$$

Aplicando a derivada exterior, obtém-se:

$$\begin{cases} d\Theta^0 = e^{-\lambda}\Phi'(r)\Theta^1 \wedge \Theta^0 \\ d\Theta^1 = 0 \\ d\Theta^2 = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^3 = \frac{e^{-\lambda}}{r}\Theta^1 \wedge \Theta^3 + cotg(\theta)\Theta^2 \wedge \Theta^3 \end{cases} \tag{5.3}$$

A primeira equação de estrutura de Cartan é:

$$d\Theta^a = -\Gamma^a{}_b \wedge \Theta^b \tag{5.4}$$

Portanto, vamos extrair cada componente a:

$$d\Theta^0 = -\Gamma^0{}_0 \wedge \Theta^0 - \Gamma^0{}_1 \wedge \Theta^1 - \Gamma^0{}_2 \wedge \Theta^2 - \Gamma^0{}_3 \wedge \Theta^3 \tag{5.5}$$

Portanto, obtemos:

$$-e^{-\lambda}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^1 = -\Gamma^0{}_0 \wedge \Theta^0 - \Gamma^0{}_1 \wedge \Theta^1 - \Gamma^0{}_2 \wedge \Theta^2 - \Gamma^0{}_3 \wedge \Theta^3 \tag{5.6}$$

Uma simples comparação leva a:

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_1 = e^{-\lambda}\Phi'(r)\Theta^0 = \Gamma^1{}_0 \\ \Gamma^0{}_0 = 0 \\ \Gamma^0{}_3 = 0 \\ \Gamma^0{}_2 = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

A primeira foi provada usando:

$$\Gamma^0{}_1 = \eta^{0c}\Gamma_{c1} = \eta^{00}\Gamma_{01} = -\Gamma_{01} = +\Gamma_{10} = \eta_{1c}\Gamma^c_0 = \eta_{11}\Gamma^1_0 = +\Gamma^1{}_0 \tag{5.8}$$

Agora, vamos calcular os próximos termos:

$$\begin{aligned} d\Theta^2 &= -\frac{e^{-\lambda}}{r}\Theta^2 \wedge \Theta^1 \\ &= -\Gamma^2{}_0 \wedge \Theta^0 - \Gamma^2{}_1 \wedge \Theta^1 - \Gamma^2{}_2 \wedge \Theta^2 - \Gamma^2{}_3 \wedge \Theta^3 \end{aligned} \tag{5.9}$$

A comparação dos lados direito e esquerdo acima nos leva a:

$$\Gamma^2{}_1 = \frac{e^{-\lambda}}{r}\Theta^2 \tag{5.10a}$$

$$\Gamma^2{}_0 = \Gamma^2{}_2 = \Gamma^2{}_3 = 0 \tag{5.10b}$$

e

$$\Gamma^2{}_1 = \eta^{2c}\Gamma_{c1} = \eta^{22}\Gamma_{21} = \Gamma_{21} = -\Gamma_{12} = -\eta_{1c}\Gamma^c_2 = -\eta_{11}\Gamma^1_2 = -\Gamma^1{}_2 \quad (5.11)$$

Portanto:

$$\Gamma^1{}_2 = -\frac{e^\lambda}{r}\Theta^2 \quad (5.12)$$

Agora,

$$d\Theta^3 = -\frac{e^\lambda}{r}\Theta^3 \wedge \Theta^1 - cotg(\theta)\Theta^3 \wedge \Theta^2 \quad (5.13)$$

e

$$d\Theta^3 = -\Gamma^3{}_0 \wedge \Theta^0 - \Gamma^3{}_1 \wedge \Theta^1 - \Gamma^3{}_2 \wedge \Theta^2 - \Gamma^3{}_3 \wedge \Theta^3 \quad (5.14)$$

outra comparação implica em:

$$\Gamma^3{}_3 = \Gamma^3{}_0 = \Gamma^0{}_3 = 0 \quad (5.15)$$

$$\Gamma^3{}_1 = \frac{e^\lambda}{r}\Theta^3 \quad (5.16)$$

e

$$\Gamma^3{}_2 = cotg(\theta)\Theta^3 \quad (5.17)$$

As simetrias (mesmo procedimento usado na eq.(12)) conduzem a:

$$\Gamma^1{}_3 = -\frac{e^\lambda}{r}\Theta^3, \Gamma^2{}_3 = -cotg(\theta)\Theta^3 \quad (5.18)$$

5.1.2 Segunda equação de Cartan

Finalmente, agora nós podemos calcular a segunda equação de estrutura de Cartan:

$$\Omega^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_e \wedge \Gamma^e{}_b \quad (5.19)$$

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\Theta^c \wedge \Theta^d \quad (5.20)$$

A comparação das eqs.(5.19) e (5.20) acima permite-nos extrair as componentes do tensor de curvatura, e iremos fazê-lo agora:

Primeiro, nós calculamos: ${\Omega^0}_1 = d{\Gamma^0}_1 + {\Gamma^0}_e \wedge {\Gamma^e}_1$:

$$\begin{aligned}
d{\Gamma^0}_1 &= d\left[e^{-\lambda}\Phi'(r)\Theta^0\right] = \\
&= d\left[e^{-\lambda}\Phi'(r)e^{\Phi}dt\right] = \\
&= d\left[e^{-(\lambda-\Phi)}\Phi'(r)dt\right] = \\
&= \frac{d}{dr}\left[e^{-(\lambda-\Phi)}\Phi'(r)\right] dr \wedge dt = \\
&= -e^{2\lambda}\left[\Phi''(r) + \Phi'(r)^2 - \Phi'(r)\lambda'(r)\right]\Theta^0 \wedge \Theta^1
\end{aligned} \tag{5.21}$$

onde no último passo usamos: $dr = e^{-\lambda}\Theta^1; dt = e^{-\Phi}\Theta^0$.
Agora, consultando os parâmetros Γ^a_b podemos concluir que:

$${\Gamma^0}_e \wedge {\Gamma^e}_1 = {\Gamma^0}_0 \wedge {\Gamma^0}_1 + ... = 0 \tag{5.22}$$

desde que: ${\Gamma^0}_0 = 0, {\Gamma^1}_1 = 0$ e assim por diante.
Portanto:

$$\begin{aligned}
{\Omega^0}_1 &= -e^{2\lambda}\left[\Phi''(r) + \Phi'(r)^2 - \Phi'(r)\lambda'(r)\right]\Theta^0 \wedge \Theta^1 = \\
&= \frac{1}{2}{R^0}_{1cd}\Theta^c \wedge \Theta^d
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Agora, o próximo termo é ${\Omega^0}_2$:

$${\Omega^0}_2 = d{\Gamma^0}_2 + {\Gamma^0}_e \wedge {\Gamma^e}_2 \tag{5.24}$$

Mas: ${\Gamma^0}_2 = 0$ e ele implica: $d{\Gamma^0}_2 = 0$.
Então, a contração:

$$\begin{aligned}
&{\Gamma^0}_e \wedge {\Gamma^e}_2 = {\Gamma^0}_0 \wedge {\Gamma^0}_2 + {\Gamma^0}_1 \wedge {\Gamma^1}_2 + \\
&{\Gamma^0}_2 \wedge {\Gamma^2}_2 + {\Gamma^0}_3 \wedge {\Gamma^3}_2
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Mas somente o segundo termo é não-nulo:

$$\begin{aligned}
{\Omega^0}_2 &= -\frac{e^{-2\lambda}}{r}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^2 = \\
&= \frac{1}{2}{R^0}_{2cd}\Theta^c \wedge \Theta^d
\end{aligned} \tag{5.26}$$

De modo similar:

$$\Omega^0{}_3 = -\frac{e^{-2\lambda}}{r}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^3 = \\ = \frac{1}{2}R^0{}_{3cd}\Theta^c \wedge \Theta^d \tag{5.27}$$

Em seguida, vamos calcular: $\Omega^1{}_2$:
Primeiro:

$$d\Gamma^1{}_2 = d\left[-\frac{e^{\lambda}}{r}rd\theta\right] = \\ = -d\left[e^{-\lambda(r)}d\theta\right] = e^{=-\lambda(r)}\lambda'(r)dr \wedge d\theta = \\ = -\frac{e^{-2\lambda(r)}\lambda'(r)}{r}\Theta^2 \wedge \Theta^1 \tag{5.28}$$

O termo cruzado é: $\Gamma^1{}_e \wedge \Gamma^e{}_2 = 0$ pois todos os demais termos nele, são nulos. Desta forma, obtemos:

$$\Omega^1{}_2 = \frac{e^{-2\lambda(r)}\lambda'(r)}{r}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \tag{5.29}$$

Em seguida, vamos calcular o termo: $\Omega^2{}_3$:

$$\Omega^2{}_3 = d\Gamma^2{}_3 + \Gamma^2{}_e \wedge \Gamma^e{}_3 \tag{5.30}$$

Mas nós sabemos que:

$$\Gamma^2{}_3 = -\frac{cotg(\theta)}{r}\Theta^3 \tag{5.31}$$

então:

$$\Gamma^2{}_3 = -\frac{cotg(\theta)}{r}rsin(\theta)d\phi = -cos(\theta)d\phi \tag{5.32}$$

Calculando a derivada exterior, obtemos:

$$d\Gamma^2{}_3 = sin(\theta)d\theta \wedge d\phi = \frac{sin(\theta)}{r}\Theta^2 \wedge \frac{1}{rsin(\theta)}\Theta^3 = -\frac{1}{r^2}\Theta^3 \wedge \Theta^2 \tag{5.33}$$

Agora, o termo: $\Gamma^2{}_e \wedge \Gamma^e{}_3$ é reduzido a:

$$\Gamma^2{}_1 \wedge \Gamma^1{}_3 = -\frac{e^{-\lambda(r)}}{r}\Theta^2 \wedge \frac{e^{-\lambda(r)}}{r}\Theta^3 = -\frac{e^{-2\lambda(r)}}{r^2}\Theta^2 \wedge \Theta^3 \tag{5.34}$$

os outros termos são nulos. Então, combinando a eq.(5.33) e a eq.(5.34) na eq.(5.30) acima, teremos:

$$\Omega^2{}_3 = \frac{\left(1 - e^{-2\lambda(r)}\right)}{r^2}\Theta^2 \wedge \Theta^3 \tag{5.35}$$

Finalmente, nós devemos calcular: $\Omega^1{}_3 = d\Gamma^1_3 + \Gamma^1_e \wedge \Gamma^e{}_3$:
Lembre-se que:

$$\Gamma^1{}_3 = -\frac{e^{-\lambda}}{r}\Theta^3 = -\frac{e^{-\lambda}}{r} r sin(\theta) d\phi \tag{5.36}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} d\Gamma^1{}_3 &= -d\left[e^{-\lambda} sin(\theta) d\phi\right] = \\ &= e^{-\lambda}\lambda' sin(\theta) dr \wedge d\phi - e^{-\lambda} cos(\theta) d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \tag{5.37}$$

Agora, expressando $dr, d\theta, d\phi$ em termos de Ω^a obtém-se:

$$d\Gamma^1{}_3 = \frac{e^{-2\lambda}\lambda'}{r}\Omega^1 \wedge \Omega^3 - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} cotg(\theta)\Omega^2 \wedge \Omega^3 \tag{5.38}$$

Agora, nós calculamos: $\Gamma^1_e \wedge \Gamma^e_3$:

$$\Gamma^1{}_e \wedge \Gamma^e{}_3 = \Gamma^1{}_0 \wedge \Gamma^0{}_3 + \Gamma^1{}_1 \wedge \Gamma^1{}_3 + \Gamma^1{}_2 \wedge \Gamma^2{}_3 + \Gamma^1{}_3 \wedge \Gamma^3{}_3 \tag{5.39}$$

O único termo diferente de zero é: $\Gamma^1{}_2 \wedge \Gamma^2{}_3$:

$$= \frac{e^{-\lambda}}{r}\Theta^2 \wedge \frac{cotg(\theta)}{r}\Theta^3 \tag{5.40}$$

Então, finalmente, este termo cancela o último termo na eq.(5.39) e nós obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega^1{}_3 &= d\Gamma^1{}_3 + \Gamma^1{}_e \wedge \Gamma^e{}_3 = \\ &= \frac{\lambda'(r) e^{-2\lambda(r)}}{r}\Theta^1 \wedge \Theta^3 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Portanto, obtemos as relações:

$$\begin{cases} \Omega^1{}_3 = \frac{\lambda'(r)e^{-2\lambda(r)}}{r}\Theta^1 \wedge \Theta^3 \\ \Omega^2{}_3 = \frac{\left(1-e^{-2\lambda(r)}\right)}{r^2}\Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Omega^1{}_2 = \frac{e^{-2\lambda(r)}\lambda'(r)}{r}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \Omega^0{}_3 = -\frac{e^{-2\lambda}}{r}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^3 \\ \Omega^0{}_2 = -\frac{e^{-2\lambda}}{r}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^2 \\ \Omega^0{}_1 = -e^{2\lambda}\left[\Phi''(r) + \Phi'(r)^2 - \Phi'(r)\lambda'(r)\right]\Theta^0 \wedge \Theta^1 \end{cases} \tag{5.42}$$

Em seguida, iremos usar a segunda equação de estrutura de Cartan para extraírmos as componentes do tensor de Riemann.

5.2 Calculando a curvatura

Agora, a partir da eq.(5.20) usando as componentes das eqs.(5.42) podemos proceder para extrair as componentes da curvatura:

Nós temos:

$$\Omega^0{}_2 = \frac{R^0{}_{2cd}}{2}\Theta^c \wedge \Theta^d = -\frac{e^{-2\lambda}}{r}\Phi'(r)\Theta^0 \wedge \Theta^2 \tag{5.43}$$

O lado esquerdo é:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[R^0{}_{202}\Theta^0 \wedge \Theta^2 + R^0{}_{220}\Theta^2 \wedge \Theta^0\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[R^0{}_{202} - R^0{}_{220}\right]\Theta^0 \wedge \Theta^2 = R^0{}_{202}\Theta^0 \wedge \Theta^2 \end{aligned} \tag{5.44}$$

onde nos últimos passos nós usamos as simetrias do tensor de Riemann (baixando e levantando índices).

Desta forma, obtemos:

$$R^0{}_{202} = -\frac{\Phi'(r)}{r}e^{-2\lambda(r)} \tag{5.45}$$

Seguindo os mesmos procedimentos, permite-nos extrair as outras componentes que são:

$$\begin{cases} R^1{}_{212} = \frac{\lambda'(r)}{r} e^{-2\lambda(r)} \\ R^0{}_{303} = -\frac{\Phi'(r)}{r} e^{-2\lambda(r)} \\ R^1{}_{313} = \frac{\lambda'(r)}{r} e^{-2\lambda(r)} \\ R^2{}_{323} = \frac{\left(1-e^{-2\lambda(r)}\right)}{r^2} \\ R^0{}_{101} = -e^{-2\lambda}\left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\lambda'\right] \end{cases} \tag{5.46}$$

Agora, nós estamos prontos para calcular o tensor de Einstein G^a_b.

Para simplificarmos os procedimentos, nós usamos as seguintes simetrias:

$$G^0{}_0 = R^1{}_{212} + R^1{}_{313} + R^2{}_{323} \tag{5.47}$$

$$G^1{}_1 = R^0{}_{202} + R^0{}_{303} + R^2{}_{323} \tag{5.48}$$

$$G^2{}_2 = R^0{}_{101} + R^0{}_{303} + R^1{}_{313} \tag{5.49}$$

$$G^3{}_3 = R^0{}_{101} + R^0{}_{202} + R^1{}_{212} \tag{5.50}$$

Então, usando as componentes acima nós obtems para o tensor de Einstein:

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = -e^{-2\lambda}\left[\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right] \tag{5.51a}$$

$$G^1{}_1 = \frac{1}{r^2} - e^{2\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r}\right] \tag{5.51b}$$

$$G^0{}_0 = \frac{1}{r^2} - e^{2\lambda}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right] \tag{5.51c}$$

Pronto! Nós calculamos as componentes do tensor de Einstein, que são relevantes para descrever a geometria do espaço-tempo, em resposta ao conteúdo de energia-matéria nele contido.

Agora, devemos encontrar um tensor energia-momento consistente (que satisfaça às condições de energia-positiva para obtermos um espaço-tempo fisicamente razoável) e levando-se em conta que as componentes de $G^a{}_b$ são nulas (considera-se que a região exterior seja vácuo).

5.3 O tensor de Einstein e o conteúdo de matéria

O tensor de Einstein é acoplado ao tensor energia-momento via equações de Einstein:

$$G^a{}_b = -\frac{8\pi}{c^4} T^a{}_b \tag{5.52}$$

Um fluido pode ser descrito pelo tensor:

$$T^{ab} = (\rho c^2 + P)U^a U^b + P g^{ab} \tag{5.53}$$

Portanto:

$$T^0{}_0 = (\rho c^2 + P)(-1) + P(1) = -\rho c^2 \tag{5.54a}$$

$$T^i{}_i = P\delta^i_i \tag{5.54b}$$

desde que $U^0 U_0 = -1$ e consideramos o sistema de referência de repouso no fluido.

Portanto, obtemos as equações:

$$G^0{}_0 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) \tag{5.55a}$$

$$G^i{}_i = -\frac{8\pi G}{c^4} P(r)\delta^i{}_i \tag{5.55b}$$

onde: $i = 1, 2, 3$ (este índice não é somado). Inserindo-se a eq.(5.52) na eq.(5.56) obtemos:

$$-e^{-2\lambda}\left[\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4} P(r) \tag{5.56a}$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{2\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4} P(r) \tag{5.56b}$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{2\lambda}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right] = \frac{8\pi G}{c^2}\rho(r) \tag{5.56c}$$

As eqs.(5.56a-c) são o ponto de partida para obtermos as equações relativísticas, ou as equações de Tolman-Oppenheimer-Snyder como são conhecidas.

A última eq.(5.56c) pode ser simplificada para:

$$\frac{1}{r^2} - e^{2\lambda}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right] = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(2\lambda' r e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}\right) = \tag{5.57}$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-r e^{-2\lambda}\right) \tag{5.58}$$

Portanto, temos:

$$\frac{d}{dr}\left(re^{-2\lambda}\right) = 1 - \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho(r) \tag{5.59}$$

que pode ser integrada de 0 a r:

$$\int_0^r d\left(re^{-2\lambda}\right) = \int_0^r dr \left[1 - \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho(r)\right] \tag{5.60}$$

ou:

$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{r}\int_0^r dr \left[1 - \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho(r)\right] = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2}\int_0^r dr r^2 \rho(r) \tag{5.61}$$

Agora, nós definimos:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r) \tag{5.62}$$

e podemos simplificar a eq.(5.61) usando a eq.(5.62) para:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \tag{5.63}$$

quando $r = R$ (superfície da estrela) nós obtemos:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM}{Rc^2} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \tag{5.64}$$

cuja solução concorda com a solução de Schwarzschild! A última é expressa unidades naturais: $G = c = 1$. Para $r > R$ no vácuo, temos:

$$e^{-2\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{5.65}$$

Agora, subtraindo a eq.(5.56b) - eq.(5.56c) obtém-se:

$$e^{-2\lambda}\left(\Phi' + \lambda'\right) = \frac{4\pi G}{c^4}\left(P + c^2\rho\right) r \tag{5.66}$$

Onde define-se:

$$e^{-2\lambda} = \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right] \tag{5.67}$$

Calculando a derivada (com relação à variável r):

$$\lambda^{'}(r) = \frac{1}{\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]} \left[\frac{G}{c^2}\right] \left[\frac{M(r)}{r}\right]^{'} \tag{5.68}$$

o termo:

$$\left[\frac{M(r)}{r}\right]^{'} = \frac{M^{'}(r)}{r} - \frac{M(r)}{r^2} = 4\pi r\rho(r) - \frac{M(r)}{r^2} \tag{5.69}$$

Portanto, pode-se reduzir a eq.(5.68) para:

$$\lambda^{'}(r) = \frac{1}{\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]} \left[\frac{G}{c^2}\right] \left[4\pi r\rho(r) - \frac{M(r)}{r^2}\right] \tag{5.70}$$

Inserindo na eq.(5.66) obtém-se:

$$\Phi^{'}(r) = \frac{1}{\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]} \left[\frac{GM(r)}{c^2 r^2} + \frac{4\pi G}{c^4} rP(r)\right] \tag{5.71}$$

Como interpretamos esta equação?

Em $r > R$, ela implica que $M(r) = M$ e $P = 0$ uma vez que estamos no vácuo, e além disso $r >> 2GM/c^2$. Dentro desta aproximação obtemos:

$$\Phi^{'}(r) \sim \frac{GM}{c^2 r^2} \tag{5.72}$$

Mas, esta é a expressão Newtoniana para a força gravitacional por massa unitária! Desta forma, ela implica que a eq.(5.71) é a expressão relativística para a força gravitacional dentro da matéria.

Agora, vamos interpretar a eq.(5.71): agora a gravidade recebe uma contribuição adiconal, proveniente da pressão:

$$\frac{4\pi G}{c^4} rP(r)$$

e o termo:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

manifesta a curvatura do espaço-tempo.

Em unidades naturais, pode-se mostrar que a pressão deve ser levada em conta se ela satisfizer: $P \sim \frac{1}{4\pi R^3}$.

Note que o sinal do segundo termo da eq.(5.71) é positivo. Isto implica que a pressão é fonte de gravidade, e agora, este termo é a principal contribuição para a instabilidade da matéria quando o raio é muito próximo do raio gravitacional: $\frac{2GM}{c^2}$.

Nestas condições, o colapso gravitacional é inevitável. A pressão auxilia a gravidade no sentido de produzir o colapso para $r = 0$. Este resultado é independente da equação de estado da matéria, que relaciona $P = P(\rho)$.

Tomando a eq.(5.59) e separando-a como:

$$\left(re^{-2\lambda}\right)' = e^{-2\lambda} + r(-2\lambda')e^{-2\lambda} = 1 - 8\pi r^2\rho(r) \tag{5.73}$$

ao simplificá-la, teremos:

$$-2r\lambda' = 1 + \left(1 - 8\pi r^2\rho(r)\right)e^{2\lambda} \tag{5.74}$$

A solução da eq.(5.57-b) leva a:

$$2r\Phi' = \left(1 + 8\pi r^2 P(r)\right)e^{2\lambda} - 1 \tag{5.75}$$

Agora, tome a derivada em r e multiplique por r:

$$2r\Phi' + 2r^2\Phi'' = e^{2\lambda}\left[2r\lambda'\left(1 + 8\pi r^2 P(r)\right) + 16\pi r^2 P(r) + 8\pi r^3 P'(r)\right] \tag{5.76}$$

inserindo as eqs.(5.74) e (5.75) acima obtemos:

$$\begin{aligned} 2r^2\Phi'' &= 1 + e^{2\lambda}\left[16\pi r^2 P(r) + 8\pi r^3 P'(r)\right] \\ &- \left[1 + 8\pi r^2 P(r)\right]\left[1 - 8\pi r^2\rho(r)\right]e^{4\lambda} \end{aligned} \tag{5.77}$$

Podemos também escrever:

$$2r^2\Phi'^2 = \frac{1}{2} + \frac{e^{4\lambda}}{2}\left(1 + 8\pi r^2 P\right)^2 - e^{2\lambda}\left(1 + 8\pi r^2 P\right) \tag{5.78}$$

Inserindo todas essas relações na eq.(5.57a) e manipulando-a, obtemos:

$$\left(\frac{dP}{dr}\right) = -\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}\left[1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)}\right]\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]^{-1} \tag{5.79}$$

Esta é a equação de equilíbrio hidrostático. No limite Newtoniano nós podemos recuperar a relação normal entre pressão, massa e densidade.

A equação acima pode ser obtida de $T^r_r; r = 0$ (lei de conservação) mas isto deve ser considerado como uma mera consequência das equações de Einstein. Além disso, podemos colocar esta equação na forma:

$$P' = -(P + \rho)\Phi' \tag{5.80}$$

onde:

$$\Phi'(r) = \frac{M(r)}{r^2} \frac{\left[1 + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{M(r)}\right]}{\left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]} \tag{5.81}$$

é a derivada radial do potencial gravitacional (aceleração).

Para uma dada equação de estado $P = P(\rho)$ essas equações podem ser integradas desde $r = 0$ a um arbitrário $r > 0$. Além disso, nós colocamos as seguintes condições de contorno: $M(0) = 0$, $\rho(0) = \rho_c$ e $P(r = R) = 0$ se a estrela tem raio R.

Para cada possível equação de estado existe uma única família de estrelas parametrizadas pela densidade central ρ_c. Então, nós obtemos uma sequência de modelos estelares com $M = M(\rho_c)$.

Podemos simplificar as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff: faça $G = c = 1$ e as escreva como:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\left(\rho(r) + P(r)\right) \frac{\left(m(r) + 4\pi P(r) r^3\right)}{r(r - 2m(r))} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r) r^2 \end{cases} \tag{5.82}$$

A versão Newtoniana dessas equações são:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(r) m(r)}{r^2} \tag{5.83a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r) r^2 \tag{5.83b}$$

Note que: se a curvatura é ignorada e a pressão não gera um campo gravitacional, obtém-se o limite Newtoniano. Pode-se agora interpretar essas equações: no limite Newtoniano: o lado direito da equação de equilíbrio hidrostático representa o peso de uma camada de matéria na posição radial r.

A única força que pode equilibrá-la é o gradiente de pressão. Desta forma, em equilíbrio, o gradiente de pressão equilibra o peso da camada de matéria.

Na versão relativística, a interpretação é a mesma, mas sua forma é um pouco diferente: ela leva em conta a pressão como fonte de gravidade e a curvatura do espaço-tempo, o fator: $(r - 2m)^{-1}$.

5.4 Limites superiores à massa de uma estrela relativística

Estas alterações, comparadas ao modelo Newtoniano, implicam a existência de um limite superior à massa. E esta é muito fácil de analisar: volte à eq.(5.83a): o lado direito tem denominador: $(r - 2m(r))$. Logo, o lado direito da eq.(5.83) diverge se em algum momento a configuração de matéria satisfizer: $m(r) = \frac{r}{2}$.

Consequentemente, a contribuição gravitacional da curvatura e peso divergem, mas o termo: $P'(r)$, o lado esquerdo, não é capaz de se ajustar a esta modificação.

Adicionalmente, a escala de tempo para esse ajuste também viola a causalidade local: o termo $v^2 = \frac{dP}{d\rho}$. O vínculo de causalidade $(v < c)$ exige que:

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right) \leq c^2 \tag{5.84}$$

e se $\frac{dP}{d\rho}$ é finito, $\frac{dP}{dr} < +\infty$ do mesmo modo (usamos a regra da cadeia: $P' \leq c^2 \rho'$).

O termo $\rho(r)$ é uma função monotônica e contínua de r, e nenhum modelo razoável de $\rho(r)$ admite uma derivada divergente de $\rho(r)$ em algum r.

A partir destas considerações, torna-se claro que o espaço-tempo torna-se fortemente encurvado: a pressão torna-se fonte de gravidade, o gradiente de pressão não é capaz de se ajustar em tempo hábil (causalidade local) e irá ocorrer o inevitável colapso da configuração de matéria.

Diversos modelos analíticos foram analisados, a partir dessas equações, usando diferentes equações de estado e condições iniciais (velocidade inicial das camadas mais externas). Os resultados gerais levam à mesma conclusão: o colapso gravitacional é inevitável, para configurações de massa que superem os limites da massa superior das estrelas de nêutrons e considerando-se que não há fonte interna de calor e pressão devido às reações nucleares normais das estrelas.

E, finalmente, deixamos claro que o **colapso gravitacional** significa que: em um **tempo próprio finito** (a partir de um observador em queda, junto com a matéria) as últimas camadas mais externas terão atravessado o raio gravitacional associado à massa, tendo sumido dentro do horizonte de eventos que irá necessariamente se formar. Do ponto de vista de um observador remotamente afastado, ele também verá o colapso gravitacional ocorrendo em um intervalo de tempo finito (levando-se em conta as correções do avermelhamento gravitacional dos raios de luz que são emitidos das camadas mais

externas).

Iremos entrar nesses detalhes mais adiante.

Estrela uniforme: vamos resolver um modelo com perfil: $\rho(r < R) = \rho_0 = B$ para $r \leq R$ e $\rho(r > R) = 0$

Resolva a eq.(5.83b) ($r \leq R$):

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} B r^3 \tag{5.85}$$

Substitua esta função na equação diferencial 5.82 e resolva para a condição de contorno: $P(R) = 0$, use o Maple. Para isto, carregue o pacote: *with(PDEtools)* e defina: *declare(P(r))*. Ambos os comandos carregam os pacotes necessários e ferramentas e defina $P(r)$ como a função pressão neste modelo.

```
> with(PDEtools); declare(P(r));
[CanonicalCoordinates, ChangeSymmetry, CharacteristicQ, CharacteristicQInvariants,
  ConservedCurrentTest, ConservedCurrents, ConsistencyTest, D_Dx, DeterminingPDE, Eta_k, Euler,
  FromJet, FunctionFieldSolutions, InfinitesimalGenerator, Infinitesimals, IntegratingFactorTest,
  IntegratingFactors, InvariantEquation, InvariantSolutions, InvariantTransformation, Invariants, Laplace,
  Library, PDEplot, PolynomialSolutions, ReducedForm, SimilaritySolutions, SimilarityTransformation,
  Solve, SymmetryCommutator, SymmetryGauge, SymmetrySolutions, SymmetryTest,
  SymmetryTransformation, TWSolutions, ToJet, ToMissingDependentVariable, build, casesplit, charstrip,
  dchange, dcoeffs, declare, diff_table, difforder, dpolyform, dsubs, mapde, separability, splitstrip, splitsys,
  undeclare]
                      P(r) will now be displayed as P
```

Figure 5.1: carregando o pacote e definindo $P(r)$

Defina as condições de contorno e a PDE no Maple como:

> $bc := P(R) = 0;$

$$bc := P(R) = 0$$

>

> $pde := \frac{\partial}{\partial r} P(r) + \frac{(P(r) + B) \cdot \left(\frac{4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r^3}{3} \cdot B + 4 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r^3 \cdot P(r) \right)}{r \cdot \left(r - \frac{8 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r^3 \cdot B}{3} \right)} = 0;$

$$pde := P_r + \frac{(P + B) \left(\frac{4}{3} \pi r^3 B + 4 \pi r^3 P \right)}{r \left(r - \frac{8}{3} \pi r^3 B \right)} = 0$$

Figure 5.2: defina as condições de contorno e a PDE

Definindo o sistema mais condições contorno:

```
> sys4 := [pde, bc];
```

$$sys4 := \left[P_r + \frac{(P+B)\left(\frac{4}{3}\pi r^3 B + 4\pi r^3 P\right)}{r\left(r - \frac{8}{3}\pi r^3 B\right)} = 0, P(R) = 0 \right]$$

Figure 5.3: configure a condição de contorno e a PDE

Agora, aplique o comando: *pdsolve(sys)* para calcular uma solução deste sistema (o Maple tenta encontrar alguma solução real):

```
> sol := pdsolve(sys4);
```

$$sol := P = \frac{\left(8B^2\pi R^2 - 3B\right)\sqrt{\frac{8B\pi r^2 - 3}{8B\pi R^2 - 3}} + \left(-12R^2 + 4r^2\right)\pi B^2 + 3B}{-12 + \left(36R^2 - 4r^2\right)\pi B}$$

Figure 5.4: determine as condições de contorno e a PDE

Agora, faça $r = 0$ para obter a **pressão central** P_c:

$$> f(r) := -\frac{\left(8B^2\pi R^2 - 3B\right)\sqrt{\frac{8B\pi r^2 - 3}{8B\pi R^2 - 3}} + \left(-12R^2 + 4r^2\right)\pi B^2 + 3B}{-12 + \left(36R^2 - 4r^2\right)\pi B};$$

$$f := r \rightarrow -\frac{\left(8B^2\pi R^2 - 3B\right)\sqrt{\frac{8B\pi r^2 - 3}{8B\pi R^2 - 3}} + \left(-12R^2 + 4r^2\right)\pi B^2 + 3B}{-12 + \left(36R^2 - 4r^2\right)\pi B}$$

```
> f(0);
```

$$-\frac{\left(8B^2\pi R^2 - 3B\right)\sqrt{-\frac{3}{8B\pi R^2 - 3}} - 12B^2\pi R^2 + 3B}{36B\pi R^2 - 12}$$

Figure 5.5: condição de contorno sobre a PDE

$f(0)$ é a pressão central. Note que existe algum problema no denominador. O denominador deve satisfazer: $-36B\pi R^2 + 12 > 0$, visto que $P_c > 0$ e $P_c < +\infty$.

> $solve(36\,B\,\pi\,R^2 - 12 < 0, R^2)$ assuming $B > 0$;

$$\left\{R^2 = R^2, R^2 < \frac{1}{3\,B\,\pi}\right\}$$

Figure 5.6: determine as condições de contorno e as PDE

Podemos realizar alguma manipulação algébrica para simplificar (lembre-se de que $\rho_0 = B$ e $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$):

$$\begin{aligned} R^2 &< \frac{1}{3\pi\rho_0} \\ R^2 &< \frac{4R^3}{(9 \times 4\pi\rho_0 R^3/3)} \\ R^2 &< \frac{4}{9}\frac{R^3}{M} \end{aligned} \tag{5.86}$$

a partir disto, obtemos:

$$M < \frac{4}{9}R \tag{5.87}$$

Este resultado mostra que, em Relatividade Geral, estrelas uniformes não podem existir com massa maior do que: $M > \frac{4R}{9}$.

Em unidades físicas, o limite superior à massa é:

$$M < \frac{4}{9}\frac{c^2 R}{G} = M_{up} \tag{5.88}$$

É óbvio que a existência de um limite superior não depende da uniformidade assumida. Ela é uma característica geral. Este limite significa que: um corpo esférico (de densidade uniforme) feito de matéria fria e raio fixo R, não pode permanecer estático além do limite superior M_{up}, visto que a pressão central P_c diverge como $M \to M_{up}$. Em outros termos:

$$\lim_{M \to M_{up}} (P_c) = +\infty \tag{5.89}$$

A partir da figura 5.5 a pressão central é:

$$P_c(R, \rho_0) = \frac{(8\pi\rho_0 R^2 - 3)\sqrt{\frac{3}{3 - 8\pi\rho_0 R^2}} - 12\pi\rho_0 R^2 + 3}{\left[\frac{12}{\rho_0} - 36\pi R^2\right]} \tag{5.90}$$

Esta expressão mostra uma outra exigência dentro da raiz quadrada:

$$3 - 8\pi\rho_0 R^2 > 0 \tag{5.91}$$

Resolvendo esta desigualdade somos levados a:

$$M < \frac{R}{2} = \frac{c^2 R}{2G} \tag{5.92}$$

Agora, vamos combinar os dois resultados acima, a partir da eq.(5.88) e a eq.(5.92):

$$M < \frac{4}{9}\frac{c^2 R}{G} \to R > \frac{9}{4}\frac{GM}{c^2} \to P_c \to +\infty \tag{5.93a}$$

$$M < \frac{c^2 R}{2G} \to R > \frac{2GM}{c^2} \tag{5.93b}$$

Mas, a primeira condição, eq.(5.93a) pode ser escrita como:

$$R > \frac{9}{8}\left(\frac{2GM}{c^2}\right) = 1.125 r_g \tag{5.94}$$

Vamos nomeá-la como: $R_* = 1.125 r_g$.
Então, podemos escrever a eq.(5.93a) como:

$$\lim_{R \to R_*} P_c(R) = +\infty \tag{5.95}$$

Consequentemente, a pressão central da estrela diverge, quando esta se aproxima do raio de Schwarzschild.

As nossas conclusões a partir das eqs.(5.93-94) são muito interessantes: antes que a configuração de matéria alcance o raio de Schwarzschild, a pressão central diverge! Este resultado é particular: depende a uniformidade assumida para a densidade: $\rho(r) = \rho_0$, no entanto, ela sugere que em situações reais o valor real é muito próximo desta condição.

A segunda condição eq.(5.92) é conhecida como condição de estaticidade. Entretanto, a pressão central deve satisfazer: $P_c \leq \rho_0 c^2$ e é óbvio que isto implica que a instabilidade deve ocorrer um pouco acima de: $r > 1.125 r_g$!

As camadas exteriores não podem ser suportadas em sua posição, não há pressão que possa fazê-lo e a gravidade puxa esta camadas em direção ao centro: elas desabam em direção de $r = 0$.

Após as camadas mais externas de matéria terem cruzado o raio de Schwarzschild, o colapso gravitacional forma um buraco negro e uma superfície de captura é originada.

5.5 A solução exterior de Schwarzschild

O modelo esférico da seção prévia descreve a configuração de uma estrela finita (sem rotação ou carga elétrica), mas em algum momento a estrela 'termina': $P(R) = 0, \rho(R) = 0$, alcançamos a sua superfície. Esta solução deve concordar com a solução de Schwarzschild fora desta estrela (vácuo). Nós iremos mostrá-lo agora.

Para $r > R$, onde R é o raio da estrela, temos: $M(R) = M$, $P(R) = 0$. Então, o fator:

$$e^{-2\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{5.96}$$

e:

$$\Phi^{'}(R) = \frac{M}{r^2}\frac{[1+0]}{\left[1-\frac{2M}{r}\right]} \tag{5.97}$$

A segunda equação pode ser integrada de $r = R$ e usando a condição: $e^{\Phi(r)} \to 1$ para $r \to \infty$, obtém-se:

$$e^{2\Phi} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{5.98}$$

Mas, esses são os coeficientes que definem o elemento de linha na eq.(5.1)! Portanto, inserindo-os no elemento de linha da eq.(5.1) nós obtemos a solução exterior:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.99}$$

Nossa análise foi muito boa pois nós obtivemos as equações para a estrutura estelar e como bonus nós recuperamos o elemento de linha de Schwarzschild que descreve a geometria em torno de uma massa estática e esférica.

O parâmetro no elemento de linha: $r = 2M$ pode ser expresso em unidades físicas como:

$$r = \frac{2GM}{c^2} = 2.97km\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{5.100}$$

O elemento de linha de Schwarzschild não descreve necessariamente um Buraco Negro, a menos que a sua massa esteja inteiramente contida dentro do raio de Schwarzschild. Neste sentido, qualquer objeto pode ser convertido em um Buraco Negro, desde que ele seja suficientemente comprimido para satisfazer a condição acima.

Definição: Um **buraco negro de Schwarzchild** é um objeto que está inteiramente confinado dentro do seu raio de Schwarzschild, com métrica descrita pelo elemento de linha eq.(5.99), onde M é a sua massa (medida por um **observador assintótico**).

Através do movimento cuidadosamente estudado de partículas de teste, podemos inferir o valor numérico desta massa sem ambiguidades.

Chapter 6

Buracos Negros: o ponto final das estrelas

6.1 O que são Buracos Negros?

Buracos Negros surgem quando o núcleo de uma estrela de grande massa cai dentro do horizonte de eventos associado àquela massa. Neste estágio final de colapso, as reações nucleares cessam, a pressão térmica das reações cai subitamente, e como consequância do peso das camadas externas, estas caem em direção ao centro. A forte curvatura do espaço-tempo e a contribuição da pressão à geração de gravidade tornam o colapso gravitacional inevitável.

O colapso gravitacional será discutido mais adiante, neste curso, onde há equações apropriadas e soluções esféricas, mais simples para a maioria dos modelos. No entanto, o formalismo geral e completo do colapso gravitacional exige um curso à parte, e algumas considerações ainda são assunto de debate entre os especialistas, veja um bom compêndio sobre isto em P.Joshi.

Em Relatividade Geral, os Buracos Negros são soluções com superfície de captura fechada (na maioria das vezes esférica ou muito próximo deste formato) onde o espaço-tempo deve ser assintoticamente plano. A segunda condição é necessária na sua definição. Com superfície de captura fechada queremos dizer que o escape a partir da região interna não é possível, por nenhum mecanismo fisicamente viável. O fato de que a velocidade de escape nesta superfície é a velocidade da luz, entra na sua definição.

A próxima figura é um diagrama, onde o eixo vertical é o tempo. Conforme passa o tempo, a superfície da estrela contrai e ao mesmo tempo, esta superfície atravessa o raio gravitacional daquela massa: $r = 2M$.

Agora, o espaço-tempo em torno daquela configuração de matéria é tão curvo que a pressão central P_c diverge, e adicionalmente, torna-se fonte adi-

cional de gravidade e curvatura, tornando a instabilidade gravitacional impossível de ser evitada. Como consequência, não há condição de estaticidade para as camadas externas de matéria e estas camadas irão cair em direção ao centro da estrela ($r = 0$).

O colapso gravitacional dura algum tempo (frações de segundo), e durante esta fase, o espaço-tempo não é estático (principalmente dentro da configuração de matéria).

Após o colapso gravitacional, iremos obter um espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild, cujo único parâmetro é a massa M da configuração. Se a configuração inicial de matéria, durante o colapso, possui algum momento angular, a métrica que irá descrever o buraco-negro resultante não será a de Schwarzschild, pois o momento angular é conservado. Ireamos ver em detalhes todas essas possibilidades.

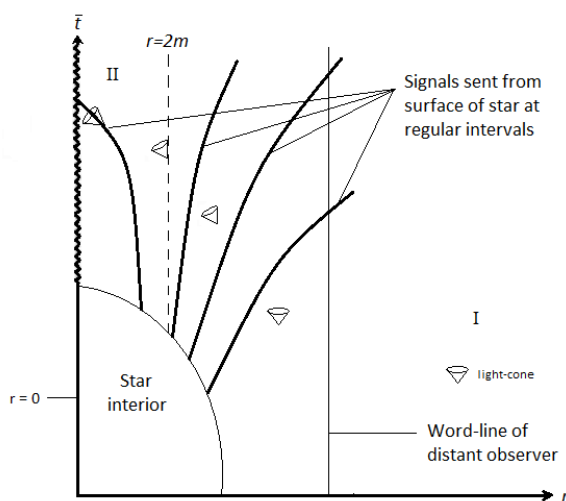



Figure 6.1: colapso gravitacional

Ou em outra perspectiva:

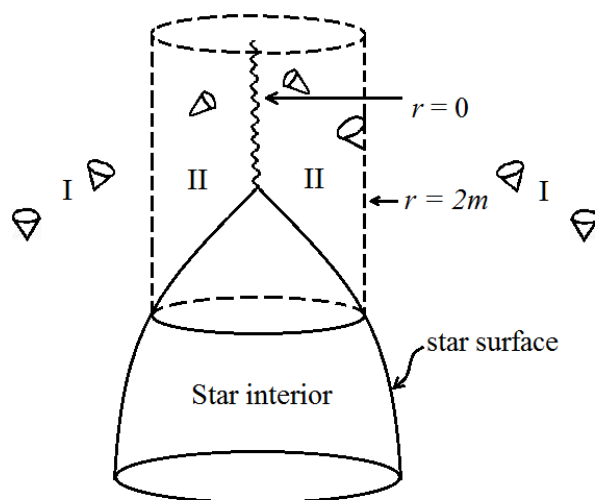



Figure 6.2: colapso gravitacional, uma dimensão suprimida

Uma vez que o Buraco Negro é formado, o espaço-tempo se divide em duas regiões causalmente não relacionadas: o interior e o exterior, separadas pelo horizonte de eventos. Os sinais físicos emitidos por observadores dentro do buraco negro caminham em direção à singularidade ($r = 0$), e desta forma não alncançam os observadores que estão do lado de fora do buraco.

Todos os sinais físicos, observadores ou partículas, no interior, caem em direção à singularidade. Isto se deve ao fato de que os cones de luz estão apontados em direção à singularidade. O cone de luz define o futuro causal e local, e uma vez que os cones de luz viram em direção à singularidade, o caminho fisicamente possível é destinado a $r = 0$.

A singularidade de um Buraco Negro sem rotação é um ponto, mas para Buracos Negros com rotação iremos obter um anel, conforme iremos ver. Todas as singularidades (tipo anel ou um ponto) são ocultas dos observadores externos pela presença do horizonte de eventos: a isto denominamos de **Censura Cósmica**, ou Conjectura da Censura Cósmica e foi enunciada por Roger Penrose nos anos 70.

O horizonte de eventos, $r = 2M$, é uma membrana *one-way*: todas as partículas, radiação ou observadores que a atravessam não poderão mais sair, pois estas terão entrado no Buraco Negro.

Na seç ao 6.4 nós iremos discutir o mais simples dos Buracos Negros: o Buraco Negro descrito pela métrica de Schwarzschild.

6.2 Argumento Newtoniano para Buracos Negros

A gravidade de Newton é uma teoria clássica, onde o campo gravitacional é gerado pela massa gravitacional (e apenas ela). Para duas massas que distam uma da outra r (referindo-se aos seus centros de massa), a interação gravitacional obedece à lei do inverso do quadrado da distância:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r} \tag{6.1}$$

onde r é a distância entre os seus centros (m), and $G = 6.67\times10^{-11}Nkg^{-2}m^2$ é uma constante.

De acordo com a Mecânica de Newton, a energia total de uma partícula é dada pela soma da **energia cinética** mais **energia potencial**. A energia potencial da gravidade é negativa, visto que a mesma tem caráter atrativo.

Portanto, calculando-se a soma acima, a enegia mecânica de uma partícula, lançada de um corpo esférico, de raio r, com massa M, a partir da sua superfície, é:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \tag{6.2}$$

aqui: v é a velocidade inicial.

A **velocidade de escape** é definida como a solução de $E = 0$ acima:

$$0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{6.3}$$

Esta é a mínima velocidade necessária para alcançar o infinito. Se a partícula é lançada radialmente, com velocidade $v < v_{es}$, elá irá retornar ao corpo central, de onde ela foi lançada. Note que a velocidade de escape depende de uma combinação da massa e do raio. Logo, se comprimimos um corpo esférico, reduzindo o seu raio (mas mantendo a sua massa), nós obtemos um objeto mais compactado e com velocidade de escape ainda maior. Na verdade, a velocidade de escape cresce proporcionalmente à compactação que lhe foi aplicada:

$$v_{esc} \propto r^{-1/2} \tag{6.4}$$

desde que: $M = cte$.

Mas, em algum momento, o corpo é tão comprimido que a velocidade de escape pode se igualar à da luz: $v_{esc} = c$. Este ponto é alcançado quando o seu raio é dado por:

$$r = r_g = \frac{2GM}{c^2} = 2.98 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{km} \tag{6.5}$$

que é obtida invertendo-se a relação da velocidade de escape, em termos do raio ($M_\odot = 2 \times 10^{33} g$ é a massa do Sol).

Mas, este é o raio **gravitacional** ou**raio de Schwarzschild** que pode ser obtido usando-se a Relatividade Geral (iremos mostrar mais adiante como obtê-lo a partir da teoria da Relatividade)!

Visto que nenhum corpo material (massivo) pode atingir a velocidade c, nenhum objeto material pode escapar, radialmente, da superfície onde tal condição se aplica. De fato, a situação real é mesmo pior do que isso como veremos.

A análise Newtoniana feita acima foi usada para se obter o raio gravitacional, mas tal análise é pobre: ela não é suficiente para deduzir o colapso gravitacional e a verdadeira natureza do espaço-tempo em volta do buraco negro. Entretanto, ainda assim é notável que possamos obter a fórmula correta do raio, mesmo partindo-se de uma teoria mais elementar.

A velocidade de escape que foi deduzida da análise Newtoniana concorda com a Relatividade Geral, mas há diferenças conceituais muito importantes aqui: na Relatividade, o escape da superfície esférica de raio R leva em conta a direção do cone de luz. Isto aparece sob a forma de um ângulo, que vai se reduzindo conforme nos aproximamos de $r = 2M$. Na teoria Newtoniana não há esta restrição: se $v > v_{esc}$, não importa a direção do lançamento. Na Relatividade, esta situação muda: $v > v_{esc}$ e o ângulo do lançamento deve estar dentro da largura do cone de luz, se o lançamento se der em um ângulo mais aberto, a partícula irá realizar uma órbita curva, mas irá necessariamente retornar ao Buraco Negro.

Adicionalmente, órbitas circulares muito próximas de um Buraco Negro são instáveis o que é mostra um comportamento muito diferente da Mecânica Celeste baseada na gravidade de Newton. Tais modificações na trajetória das partículas é o reflexo direto da curvatura do espaço-tempo.

Todos os corpos podem ser convertidos em um Buraco Negro se os mesmos forem comprimidos dentro do seu raio de Schwarzschild. Se o Sol fosse comprimido para pouco menos de 3km, ele entraria em colapso gravitacional e iria desaparecer do universo, formando um Buraco Negro. Apenas o seu campo gravitacional iria permanecer.

Entretanto, apenas a Relatividade Geral é capaz de descrever o colapso gravitacional em detalhes. Agora, algumas diferenças adicionais são muito importantes: na Relatividade Geral, iremos descobrir que a superfície de um buraco negro não é uma superfície sólida: não há nada em $r = 2M$!

Além disso, o campo gravitacional é tão intenso que os cones de luz locais, em $r = 2M$ irão apontar para a singularidade em $r = 0$. O campo gravitacional é tão forte próximo de $r = 2M$, que a aceleração dos motores de um foguete devem realizar muito mais trabalho do que na mesma situação Newtoniana. Há um efeito de curvatura nesta nova situação. Do mesmo modo que ocorre na gravidade de Newton, há aqui um campo gravitacional que deverá puxar uma nave na direção de $r = 0$, e esta deverá exigir muito de seus motores se desejar ficar estática em $r > 2M$, ou a mesma pode decidir manter uma órbita (circular ou elíptica) em redor do Buraco Negro.

Vamos começar calculando a aceleração gravitacional no modelo Newtoniano:

Na gravidade Newtoniana, a aceleração gravitacional na superfície de uma massa M de raio R é:

$$a = -\frac{GM}{R^2} \tag{6.6}$$

Inserindo o raio de um Buraco Negro $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ em termos da massa, na expressão acima, leva-nos a:

$$a = -\frac{c^4}{4GM} \tag{6.7}$$

No entanto, esta expressão não leva em conta a curvatura do espaço-tempo.

Conforme nós iremos ver nos capítulos avançados, devemos levar em conta o fator: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$ da curvatura do espaço. A aceleração gravitacional que foi calculada acima vale para o observador assintótico, longe do Buraco Negro.

Logo, levando-se em conta este fator, a aceleração medida pelo observador em $r > r_g$ é:

$$a(r) = -\frac{c^4}{4GM}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} \tag{6.8}$$

Então, o seguinte limite vale:

$$\lim_{r \to r_g} a(r) = +\infty \tag{6.9}$$

Este é um incrível efeito: a aceleração gravitacional na superfície de um buraco negro é infinita, logo, não há qualquer possibilidade física de se permanecer estático, no horizonte de eventos (você não tem recursos para isso). Como tal superfície não é sólida, uma vez que um astronauta se situe em $r = 2M$, ele será violentamente puxado para dentro do objeto.

Para finalizar, a gravidade de superfície de um Buraco Negro de Schwarzschild como:

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} \tag{6.10}$$

Observe que não há o fator geométrico: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$.

Agora, temos 2 observadores: um deles permanece em uma distância fixa do buraco negro e o outro se aproxima dele. O cone de luz começa a reduzir o seu tamanho, e os pulsos de luz permitidos, emitidos dele, devem obedecer à geometria deformada induzida no cone de luz.

Para finalizar esta seção, nós mostramos uma figura que descreve a curvatura do espaço-tempo e sua influência sobre os cones de luz. Há dois observadores: um deles permanece a uma distância fixa do Buraco Negro e outro se aproxima dele. O cone de luz começa a se reduzir, e quaisquer sinais emitidos a partir daquele ponto devem ter uma inclinação relativa de acordo com o cone de luz naquela posição. Repare que esta inclinação começa a apontar cada vez mais na direção da tangente ao horizonte de eventos.

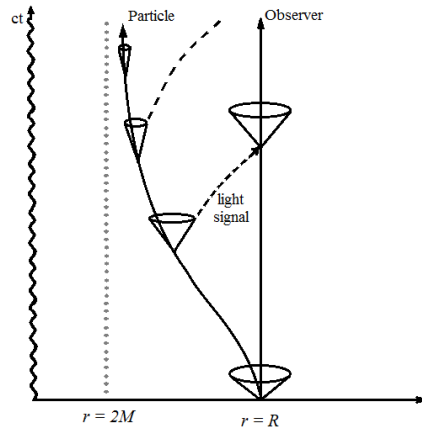



Figure 6.3: cones de luz de diferentes perspectivas

A superfície $r = 2M$ é uma superfície nula: os vetores tangentes são nulos nela. Qualquer partícula que vem do infinito, atravessa o horizonte de eventos na perpendicular ao mesmo.

6.3 Buracos Negros de Schwarzschild

Nesta seção, nós iremos mostrar algumas propriedades do espaço-tempo em torno de um Buraco Negro, descrito pela métrica de Schwarzschild.

6.3.1 Valores físicos e aparentes

O elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.11)$$

descreve o espaço-tempo em torno de uma massa estática M. Este elemento de linha não descreve um Buraco Negro a menos que o tamanho deste corpo esteja inteiramente contido dentro do seu raio de Schwarzschild $r_g = 2M$. Vamos supor que isto seja verdade, então o elemento de linha acima descreve um Buraco Negro de massa M, sem carga elétrica e sem rotação. Agora, o ponto importante aqui é interpretar os termos que aparecem na métrica. Quais são as suas medidas físicas?

Para responder esta pergunta, voltemos ao elemento de linha de Minkowski, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.12)$$

Aqui: a **distância física radial** é: $dR = \sqrt{g_{11}dr^2} = dr$ e o tempo físico é: $dT = \sqrt{-g_{00}(r)dt^2} = dt$.

Então, a distância física radial e o tempo são usuais, mas na métrica de Schwarzschild nós temos:

$$\begin{cases} dR = \sqrt{g_{11}(r)}dr \\ dT = \sqrt{-g_{00}(r)}dt \end{cases} \quad (6.13)$$

onde: $g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ e $g_{11} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$. Então, as medidas físicas são deformadas pelo fator: $\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$: este fato reflete a curvatura do espaço 3D!

Então, o primeiro ponto importante a reforçar aqui é: as medidas físicas dependem da localização relativa: um observador remoto: $r = \infty$ e um em r não concordam com as medidas de espaço e tempo.

Desta forma, o **intervalo de tempo físico** (tempo próprio) $d\tau$ e o **intervalo de tempo aparente** dt são definidos por:

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}(r)}dt = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt \quad (6.14)$$

e o intervalo de **distância radial físico** dR e o **aparente** dr são relacionados por:

$$dR = \sqrt{g_{11}(r)}dr = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}dr \tag{6.15}$$

Vamos usar estas definições para analisar comparações feitas em lugares diferentes na presença de um buraco negro em $r = 0$.

6.3.2 Dilatação gravitacional do tempo

Como vimos, acima, o tempo físico ou tempo próprio é dado por:

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt \tag{6.16}$$

onde: dt é o intervalo de tempo medido por um observador no infinito. A variável: t é chamada **tempo aparente** (ou coordenada de tempo simplesmente) e $d\tau = dt$ se $r = +\infty$ como deve ser.

A comparação entre o **tempo aparente** e o tempo físico permite-nos concluir que relógios correm mais lentamente próximos de um Buraco Negro se comparados a um relógio localizado no infinito:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} >> d\tau$$

Então, se 2 eventos duram 1 hora no local r, esses eventos podem durar diversos dias de acordo com as medidas feitas pelo observador remoto: $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}$, dependendo somente da distância r (distância aparente).

Este é exatamente o efeito da dilatação gravitacional do tempo que foi explorado em muitos filmes como *Interestelar*.

6.3.3 Aceleração local

A aceleração gravitacional de um objeto de teste, à distância r do corpo central de massa M, na gravidade Newtoniana, é dada por:

$$a = \frac{M}{r^2} \tag{6.17}$$

Novamente, desconfia-se que esta mesma equação não seja mais válida no espaço-tempo fortemente curvo de um buraco negro, e naturalmente, o fator: $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ deve entrar em cena mais uma vez, lembre-se: estamos na geometria de Schwarzschild.

Desta forma, levando-se em conta o fator $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, a aceleração gravitacional de um corpo que está inicialmente em repouso, à distância r, na métrica de Schwarzschild, é:

$$a = \sqrt{a^i a_i} = \frac{M/r^2}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \tag{6.18}$$

Aqui, cabe interpretá-la adequadamente: esta é a aceleração local, medida pelo observador em r. Um observador remoto tem uma medida diferente da aceleração de queda livre deste mesmo objeto, pois ele está muito afastado. Cabe ressaltar ainda, que na tomada de medidas ainda deveremos levar em conta os sinais de luz e retardo dos mesmos, quando o observador remoto estiver monitorando continuamente a queda livre da partícula de teste.

O importante aqui, é perceber que: o observador local e próximo do Buraco Negro cai com uma aceleração que diverge quando $r \to 2M$ como pode ser obtido de uma simples análise da fórmula. Por outro lado, isto também é equivalente a dizer que: se este observador deseja se manter estático na posição r, quando r é próximo de $2M$, os motores de sua nave deverão gastar imensas quantidades de energia, pois a aceleração gravitacional local é intensa quanto mais se aproximar de $r \sim 2M$.

Eventualmente, se um observador cruzar o horizonte de eventos, ele estará na situação em que $r < 2M$, e o termo $g_{00}(r)$ muda de sinal algébrico (assim como o termo $g_{11}(r)$). Logo, espaço e tempo são revertidos.

Como consequência, a métrica não é estática para $r < 2M$ pois o sinal relativo entre espaço e tempo são revertidos no interior do Buraco Negro. Este efeito se reflete na orientação dos cones de luz.

Agora, quando o observador cruza o horizonte de eventos, o seu cone de luz tem o futuro apontando para a singularidade $r = 0$. Nenhuma partícula ou observador permanece estático lá: a reversão do cone de luz arrasta-o em direção da singularidade em $r = 0$.

6.3.4 O movimento radial da luz

Vamos calcular o comportamento de um sinal de luz no movimento radial. O caminho da luz satisfaz: $ds^2 = 0$, logo (considerando que o movimento é radial: $d\theta = d\phi = 0$) a eq.(6.15) se torna:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 \tag{6.19}$$

Resolvendo-a:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{6.20}$$

onde: + indica raio de luz se afastando (radialmente) e − indica incidente. Qual é o significado disto?

Esta é a taxa de mudança da distância aparente dr como medida pelo observador remoto $r = \infty$. Esta não é a velocidade física.

A velocidade física é a taxa de mudança da distância física pelo tempo próprio:

$$\frac{dX}{d\tau} = \pm\frac{\sqrt{g_{11}(r)}}{\sqrt{-g_{00}(r)}}\frac{dr}{dt} =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{2M}{r})}}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{2M}{r})}}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \pm 1 \tag{6.21}$$

Então, a velocidade da luz medida pelo observador local em r é ± 1, ou em unidades físicas: $\pm c$ como deve ser!

A velocidade física medida pelo observador remoto é:

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{g_{11}(r)}\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{2M}{r})}} = \pm\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \tag{6.22}$$

Este é um resultado notável: de acordo com um observador remoto, a luz reduz sua velocidade e congela no horizonte de eventos quando $r \to 2M$. Este é o efeito da dilatação do tempo!

Agora, quanto tempo um fóton leva (pelo relógio de um observador remoto) para alcançar r se o mesmo iniciou em $r_1 > r$?

É suficiente integrar a eq.(6.21):

$$\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{(1-\frac{2M}{r})} = -\int_0^t dt \tag{6.23}$$

Resolvendo-a obtém-se:

$$t(r) = r_1 - r + 2Mln\left(\frac{r_1 - 2M}{r - 2M}\right) \tag{6.24}$$

Em unidades físicas este valor é (recupere G e c):

$$t(r) = \frac{r_1 - r}{c} + \frac{2GM}{c^2} ln\left(\frac{r_1 - 2GM/c^2}{r - 2GM/c^2}\right) \tag{6.25}$$

O óbvio limite se segue:

$$\lim_{r \to 2M} t(r) = +\infty \tag{6.26}$$

Cujo resultado intuitivo não nos deveria surpreender, pois este remete à eq.(6.24) em função do tempo.

6.3.5 Redshift e Blueshift

Se um fóton começa sua viagem radial de um ponto r_1 a r_2 sua frequência ν muda de acordo com:

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_1}}{1 - \frac{2M}{r_2}}} \tag{6.27}$$

Primeiro caso: $r_1 >>> r_2$ (incidente):

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)}} \tag{6.28}$$

isto implica: $\nu_2 >> \nu_1$: deslocamento ao azul.
Segundo caso: $r_2 >>> r_1$ (emergente):

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)} \tag{6.29}$$

isto implica: $\nu_2 << \nu_1$: deslocamento ao vermelho ou redshift.

6.3.6 Movimento radial de uma massa de teste

Uma partícula que comece a cair do infinito satisfaz a equação:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{r_g}{r} \tag{6.30}$$

onde: $E = 1$ se $v = 0$ em $r = +\infty$. Resolvendo-a obtém-se:

$$\tau = \frac{2r_g}{3c}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} \tag{6.31}$$

No primeiro quadro acima deduzimos que o tempo próprio para cair em $r = 0$ é finito de acordo com o observador local. O segundo quadro calcula o tempo para alcançar $r = 2M$ como medido pelo observador remoto. Este tempo é infinito. No entanto, na prática, os raios de luz emitidos pela partícula são violentamente deslocados ao vermelho (redshift) no infinito. Desta forma, em algum instante, o observador remoto irá perder a visibilidade da partícula em queda. Por último, os cones de luz locais têm a sua abertura reduzida conforme nos aproximamos do horizonte. A abertura dos cones de luz se reduz a zero no horizonte e para $r < 2M$ o futuro que é apontado pelo cone de luz, se direciona para a singularidade.

6.4 Órbitas de fótons e partículas com massa

No capíitulo 11 iremos deduzir as equações orbitais para fótons e partículas. A preseença de um corpo massivo encurva a trajetória da luz. O Sol é capaz de encurvar a trajetória da luz proveniente das estrelas distantes. A figura a seguir mostra este efeito.

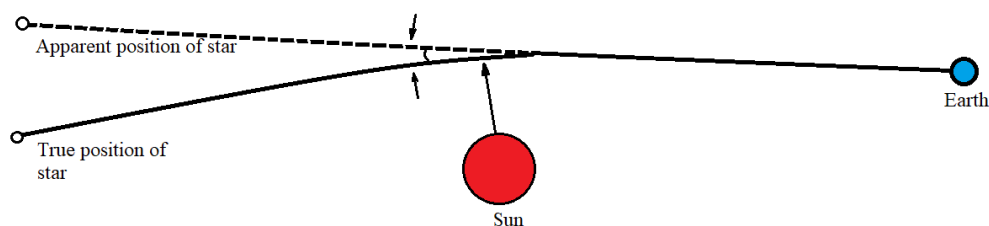



Figure 6.4: desvio da trajetória da luz ao passar pelo Sol

De fato, espera-se que este efeito seja mais forte próximo de um Buraco Negro, e quando o parâmetro de impacto é menor.

Além da trajetória de fótons, podemos discutir a trajetória de qualquer tipo de partícula em torno de um buraco negro. Órbitas circulares e elípticas são são possíveis em torno de um buraco negro, mas devido à forte curvatura do espaço-tempo, novos efeitos surgem aqui.

Observa-se que órbitas circulares existem apenas para $r > 3r_g$, conforme nós iremos deduzir mais adiante.

A figura a seguir mostra o encurvamento da luz e os cones de luz, descrevendo as possíveis trajetórias da luz de distantes posições. A luz emitida a partir do horizonte não é capaz de escapar a partir daquela região.

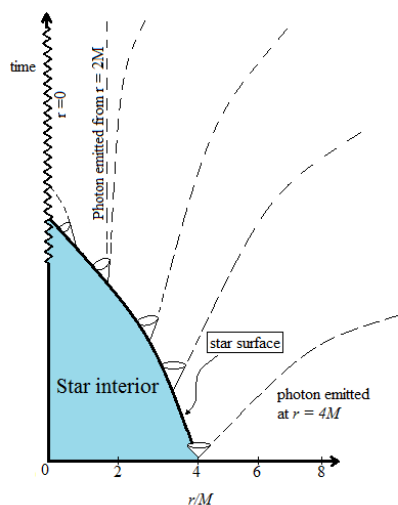



Figure 6.5: trajetórias de luz emitidas de posições diferentes

A próxima figura mostra as órbitas das partículas incidentes a partir do infinito:

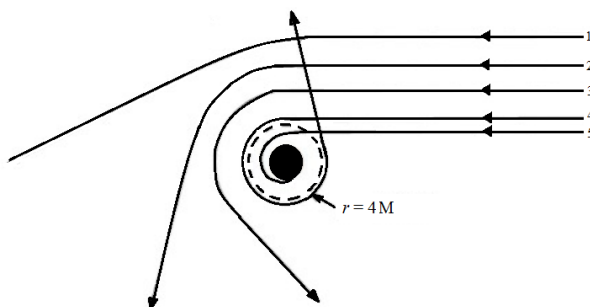



Figure 6.6: Buraco Negro defletindo as trajetórias de partículas provenientes do infinito

Partículas com massa têm raio de captura dado por: $R = 4GM/c^2$ e fótons têm radio de captura dado por: $R = 3GM/c^2$. Devido à curvatura do espaço-tempo, a trajetória das partículas próximas a um buraco negro são muito diferentes do caso Newtoniano com um corpo central com a mesma massa.

6.4.1 Equação Orbital

A equação orbital de uma partícula com momento angular L é dada pelas equações:

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2; \text{time-like} \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}\right) = E^2; \text{light} \end{cases} \tag{6.32}$$

A quantidade abaixo é denominada **potencial efetivo**:

$$V_{eff}(r, L) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(k + \frac{L^2}{r^2}\right) \tag{6.33}$$

onde: $k = 1$ corresponde a partículas com massa e $k = 0$ corresponde a fótons (raios de luz).

Partículas com massa seguem geodésicas tipo-tempo e fótons viajam nas geodésicas nulas.

Principais resultados para $k = 1$:

1) Existem órbitas cirulares somente se $L > \sqrt{12}GM$.

$$\begin{cases} r > 6M; \text{stable circular orbit} \\ 3M < r < 6M; \text{unstable circular orbit} \\ r < 3M; \text{there are no circular orbits} \end{cases} \tag{6.34}$$

6.4.2 Estabilidade das órbitas

Para determinar a estabilidade das órbitas, nós temos que descobrir os pontos extremos do potencial efetivo. Esses pontos satisfazem:

$$\left(\frac{\partial V_{eff}(r)}{\partial r}\right) = 0 \tag{6.35}$$

Esta condição nos leva a:

$$Mr^2 - L^2 r + 3ML^2 = 0 \tag{6.36}$$

com raízes:

$$R_{1,2} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12L^2M^2}}{2M} \tag{6.37}$$

O resultado acima indica que existem órbitas circulares estáveis somente se: $L^2 > 12M^2$. Note-se que este resultado conflita drasticamente com a teoria Newtoniana, onde não há valor mínimo para L. No caso, $L^2 < 12M^2$, uma partícula incidente a partir do infinito irá alcançar $r = 2M$ e após, irá alcançar a singularidade. A figura seguinte mostra o potencial efetivo para $L^2 < 12M^2$. Usamos o Maple, escolhendo-se $M = 1$, $k = 1$. Para definir a a função, use a sintaxe: function(parameteres):=expression:

Effective Potential: M=1, L < $\sqrt{12}$

> $V_eff(r, M, k, L) := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(k + \frac{L^2}{r^2}\right);$

$$V_eff := (r, M, k, L) \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(k + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

Figure 6.7: definindo $V_{eff}(r, M, k, L)$ no Maple

Agora, configure o último parâmetro, $L = 2$, o que gera a próxima figura:

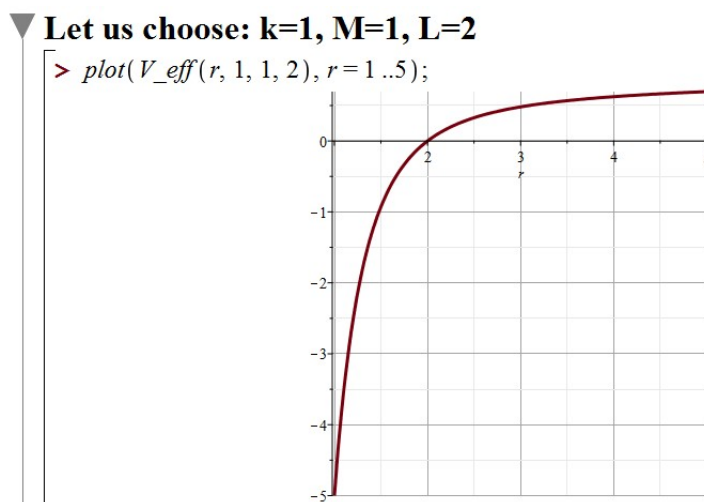



Figure 6.8: gráfico de $V_{eff}(r, M = 1, k = 1, L = 2)$ no Maple

No Maple, usa-se o comando: plot(function(x), intervalo de x) para executar o gráfico.

Para $L^2 = 100$ temos o gráfico de $V_{eff}(r, L)$:

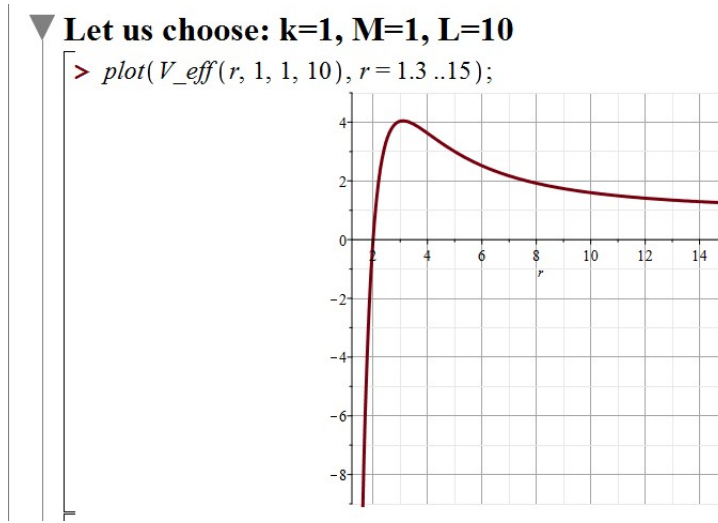



Figure 6.9: gráfico de $V_{eff}(r, M = 1, k = 1, L = 10)$ no Maple

Acima: note-se que existe um pico próximo de valores menores de r e órbitas circulares estáveis podem ser encontradas somente para $r > 6M$.

A transição entre esses comportamentos ocorre em $L = \sqrt{12}, M = 1$, no Maple, o gráfico desta condição é:

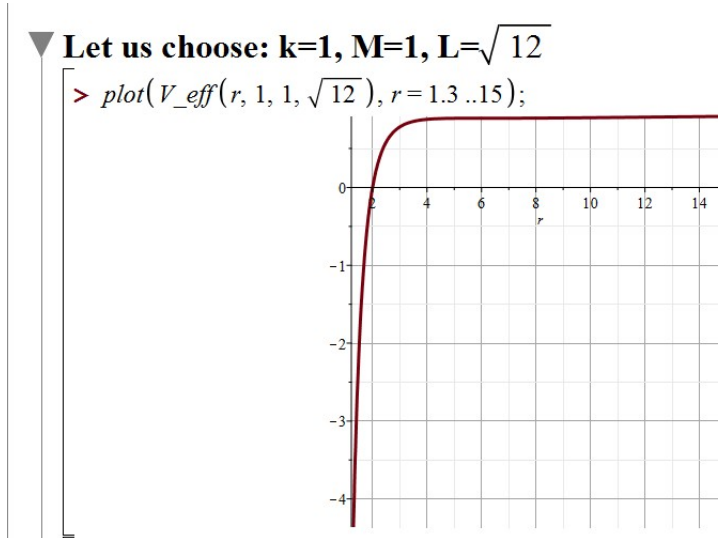



Figure 6.10: gráfico de $V_{eff}(r, M = 1, k = 1, L = \sqrt{12})$ no Maple

Observe que a curva é horizontal para $r \geq 4M$.

6.4.3 Órbitas Circulares

Uma órbita circular é dada por: $\dot{r} = 0$, então a eq.(6.33) pode ser escrita como:

$$E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r}\right) \tag{6.38}$$

No mínimo temos: $0 = Mr^2 - L^2 r + 3ML^2$, portanto, isolando: L^2:

$$L^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} \tag{6.39}$$

Inserindo de volta na eq.(6.39) obtém-se:

$$E(r) = \frac{(r - 2M)}{\sqrt{r\,(r - 3M)}} \tag{6.40}$$

Agora, vamos analisá-lo, para $3M < r < 4M$ é fácil mostrar que $E(r) > 1$, mas o limite vale:

$$\lim_{r \to 3M} E(r) = +\infty \tag{6.41}$$

Isto significa que uma perturbação lança a partícula ao infinito (ela ganha energia cinética suficiente para isso).

Finalmente, o destino de uma partícula em uma órbita circular é determinado pelas ondas gravitacionais: ela perde energia cinética e espirala a $r = 6M$, onde a órbita passa a ser instável. Visto que ela continua a irradiar ondas gravitacionais, perdendo mais energia cinética, e sendo a órbita instável, ela cruza o horizonte de eventos e cai em $r = 0$. Podemos mostrar que a parícula perde 0.06 da energia inicial em ondas gravitacionais se o Buraco Negro não possui rotação, e perde até 0.42 se o mesmo tiver rotação.

6.4.4 Principais resultados para $k = 0$

O potencial efetivo para geodésicas nulas é:

$$V_{eff}(r, L) = \frac{L^2}{2r^3}\,(r - 2M) \tag{6.42}$$

O máximo está localizado em $r = 3M$. Então, órbitas circulares instáveis para fótons ocorrem em $r = 3M$, vide figura abaixo:

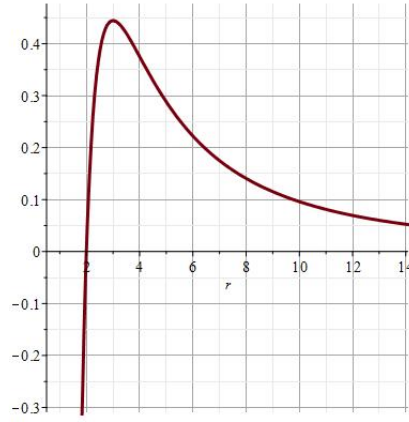



Figure 6.11: $V_{eff}(r, L)$ para fótons

No Maple, se você deseja plotar diversos valores de L em um gráfico, use o comando *display:*

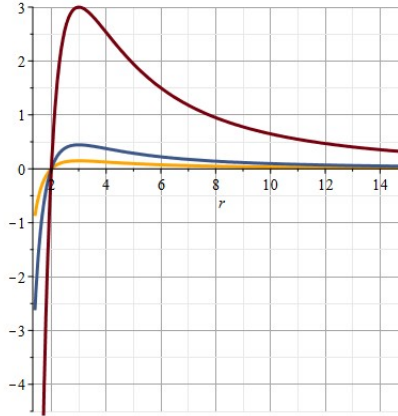



Figure 6.12: $V_{eff}(r, L)$ para 3 valores de L^2 : $[4, 12, 81]$

Alguns raios de luz podem ser capturados pelo Buraco Negro. Para analisar isto, vamos escrever as equações que descrevem a trajetória de luz na geometria de Schwarzschild:

$$\begin{cases} L = r^2\dot{\phi}; \text{angular momentum} \\ E^2 = \dot{r}^2 + V_{eff}(r, k = 0) \end{cases} \tag{6.43}$$

Dividindo-se o primeiro pelo segundo, obtemos:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2}\left[E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M)\right]^{-1/2} \tag{6.44}$$

O valor na raiz deve ser positivo com o fim de evitar a captura de fótons. Como resultado, a captura ocorre se R é menor que a raiz de:

$$E^2 - \frac{L^2}{R^3}(R - 2M) \tag{6.45}$$

ou, isolando-se R:

$$R^3 - \left(\frac{L}{M}\right)^2 (R - 2M) = 0 \tag{6.46}$$

uma raiz da eq.(6.46) é:

$$R_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} cos \left[\frac{1}{3} arccos\left(-3^{3/2}M/b\right)\right] \tag{6.47}$$

onde: $b = \frac{L}{E}$ é denominado **parâmetro de impacto**.

6.4.5 Condições para a captura

As principais conclusões são: 1) se o fóton vem do infinito com parâmetro de impacto menor que: R_0 ele será capturado. 2) Se $R > R_0$ ele será defletido pelo campo gravitacional.

A **seção de choque para captura gravitacional** é: $\sigma = \pi {b_c}^2$, e ela será dada por:

$$\sigma = 27\pi M^2 \tag{6.48}$$

Acima resolvemos: $-1 = -3^{3/2}M/b$ implicando: $b = b_c = 3^{3/2}M$ para o parâmetro de impacto.

6.5 Buracos Negros não têm cabelo

Podemos supor que o colapso estelar ocorreu de modo esfericamente simétrico, sem irregularidades. Deste modo, para um observador externo, o espaço-tempo pode ser considerado Schwarzschild, parametrizado unicamente pela massa M. Se o observador lançar partículas em direção do objeto, ele pode extrair o valor da massa M a partir do movimento destas partíulas.

Entretanto, as estrelas possuem rotação (e outras propriedades tais como correntes elétricas e campos magnéticos) e o quadro acima pode ser muito diferente da situação real, pelo menos em princípio.

Nesta situação, R.H.Price mostrou que algumas propriedades que caracterizam a estrela (spin) podem ser irradiadas 'para longe'.

Tais quantidades são denominadas multipolos e spin. O fóton é uma partícula com spin 1 e o gráviton tem spin 2. O **Teorema de Price** nos garante que multipolos de ordem mais alta são varridos, de acordo com o seu spin.

Vamos dar alguns exemplos. De acordo com este teorema, momentos elétricos e magnéticos são de ordem 1, e portanto serão irradiados. O único multipolo que pode sobreviver deve ser o de spin 0, mas este corresponde à carga elétrica.

A gravidade é associada ao gráviton que possui spin 2. Deste modo, os únicos multipolos que sobrevivem serão os de ordem 0 e 1: massa e momento angular.

Vamos construir um modelo da situação: imagine uma estrela quase-esférica entrando em colapso gravitacional. Um observador externo pode extrair algums informações a partir do espaço-tempo, usando partículas e luz. Ele pode interagir com este corpo. Tais interações transportam detalhes do espaço-tempo e da estrutura estelar. Conforme o colapso gravitacional prossegue, tais detalhes começam a desaparecer.

Os únicos detalhes que sobrevivem ao colapso gravitacional são os detalhes codificados pela massa, carga elétrica e momento angular: eles correspondem aos momentos com spin ¡ spin associado às interações externas.

Se considerarmos apenas a gravidade e os campos eletromagnéticos, nós iremos concluir que os únicos parâmetros que determinam um buraco negro são a massa, carga elétrica e momento angular. Note que apenas a gravidade e campos eletromagnéticos têm alcance infinito. John Wheeler nomeou esta situação como: "Buracos Negros não têm cabelo" (apenas três fios).

6.6 Buracos Negros com rotação e carga elétrica

6.6.1 Família geral de soluções

Depois de Karl Schwarzschild, H.Reissner em 1916 e Nordstrom em 1918 deduziram o espaço-tempo de uma estrela esférica com massa M e carga elétrica Q. O elemento de linha deste objeto é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (6.49)$$

O Buraco Negro acima tem massa m e carga Q, mas não tem rotação (momento angular).

Em 1963, R.P.Kerr obteve o espaço-tempo de um objeto com massa M e momento angular J. Finalmente, em 1966, Newman obteve a mais geral solução das equações de Einstein descrevendo a métrica de um objeto com massa, carga e momento angular.

Esta é a solução mais geral possível de acordo com o **Teorema de Price**: $F = (M, J, Q)$. O Buraco Negro de Schwarzschild tem $(M, 0, 0)$, o de Reissner-Nordstrom tem $(M, 0, Q)$, o Buraco Negro de Kerr tem $(M, J, 0)$ e o de Kerr-Newman tem (M, J, Q).

O elemento de linha de Kerr-Newman descreve Buracos Negros com massa M, carga Q e momento angular J e é dado por:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left[dt - asin^2(\theta)d\phi\right]^2 + \frac{sin^2(\theta)}{\rho^2}\left[(r^2 + a^2)d\phi - adt\right]^2 + \\ + \frac{sin^2(\theta)}{\rho^2}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \qquad (6.50)$$

$$\text{onde: } \begin{cases} \Delta = r^2 - 2\mu r + a^2 + q^2 \\ \rho^2 = r^2 + a^2 cos^2(\theta) \\ \mu = \frac{GM}{c^2} = M \\ q = Q\sqrt{\frac{G}{c^4}} = Q \\ a = \frac{J}{Mc} = \frac{J}{M} \end{cases} \qquad (6.51)$$

Se fizermos $J = 0$ obteremos a solução de Reissner-Nordstrom, e se $a = 0$ e $q = 0$ recuperamos o elemento de linha de Schwarzschild.

6.6.2 Buraco Negro de Kerr-Newman

Agora, de volta à métrica de Kerr-Newman. Nesta métrica, o Buraco Negro tem um horizonte de eventos, esférico em formato e com área de superfície:

$$A = 4\pi \left({r_+}^2 + a^2\right) \qquad (6.52)$$

E, existem 2 horizontes dados por:

$$r_+ = \frac{1}{2}\left[r_g + \sqrt{\zeta^2}\right] \tag{6.53a}$$

$$r_- = \frac{1}{2}\left[r_g - \sqrt{\zeta^2}\right] \tag{6.53b}$$

com:

$$\zeta^2 = r_g^2 - 4a^2 + 4q^2 \tag{6.54}$$

e: $r_g = 2M$ em unidades naturais.

Observe que os horizontes acima existem somente se $\zeta^2 > 0$, logo, se $\zeta^2 < 0$ os horizontes desaparecem! Neste caso, existe o que é conhecido como **singulariade nua**: uma singularidade visível aos observadores externos. Ninguém sabe se esta possibilidade pode acontecer, e existe uma conjectura denominada **Censura Cósmica**, enunciada por R. Penrose que afirma não existirem singularidades nuas na natureza.

Além dessas, existe ainda outra superfície, não esférica em formato, dada por:

$$r_\alpha = \frac{1}{2}\left[r_g + \sqrt{r_g^2 - 4q^2 - 4a^2 sin^2(\alpha)}\right] \tag{6.55}$$

onde α denota a latitude. A região entre r_+ e o limite estático é conhecida como **ergoesfera**.

A ergoesfera possui uma propriedade muito interessante: nada pode ficar parado lá: o espaço-tempo roda junto com o Buraco Negro, este é o efeito Lense-Thirring. Além disso, o espaço-tempo fora roda também (mas há a possibilidade de se ficar parado lá). A figura a seguir mostra que o período de relógios em movimento retrógrado e progressivo são muito diferentes:

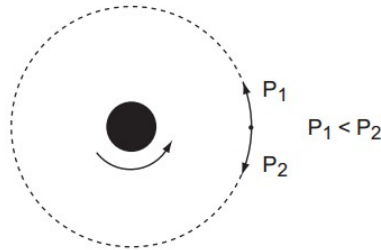



Figure 6.13: $P1 < P2$ devido ao arrasto dos referenciais

Note que:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \tag{6.56}$$

E, o limite estático é dado pela expressão:

$$r(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 cos^2(\theta)} \tag{6.57}$$

Desta forma:

$$r(0) = r_+ \tag{6.58}$$

Note também que: $r_+ < r_g = 2M$.
Logo,

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2M > r_+ \tag{6.59}$$

6.7 Física dos Buracos Negros

6.7.1 Mecanismo Penrose

A ocorrência de 2 superfícies separadas (limite estático e o horizonte de eventos) permite um mecanismo para extração de energia de Buracos Negros com rotação. Na ergoesfera a t-coordenada torna-se tipo-espaço (ela é tipo-tempo na região externa). Isto dá surgimento à possibilidade de valores negativos para a energia medida por observadores externos (lembre-se dos vetores de Killing).

Em 1969, Roger Penrose esboçou um experimento imaginado para demonstrar este efeito. O experimento consiste em lançar uma partícula em direção ao Buraco Negro, mas esta partícula se fragmenta em duas, quando ela está dentro da ergoesfera. Um dos fragmentos pode ser extraído do Buraco Negro e o outro segue uma trajetória de energia negativa no horizonte. Como consequência, o Buraco Negro termina com menos massa-energia que antes.

Este processo tem um limite superior. Conforme partículas caem no Buraco Negro, o sinal relativo do momento angular é oposto ao do Buraco Negro. Desta forma, o Buraco Negro perde momento angular. Lançar partículas com momento angular oposto ao do Buraco Negro irá fazer com que o mesmo perca momento angular. O processo termina quando ele não tem mais momento angular (ele se torna um Buraco Negro de Schwarzschild). A partir deste momento, nenhuma energia adicional pode ser extraída do Buraco Negro.

A máxima eficiência neste processo é extrair 29% da energia-massa inicial do Buraco Negro com rotação. Precisamos aplicar o Teorema das Áreas para demonstrá-lo, tópico a ser discutido logo em seguida.

6.7.2 Teorema das Áreas

Analisando a energia que poderia ser liberada pela interação com Buracos Negros, S.Hawking em 1971, descobriu um teorema muito relevante: o Teorema das Áreas. Este teorema afirma que, sob processos clássicos, a área do horizonte de eventos de um Buraco Negro não pode ser reduzida.

$$dA = A_{final} - A_{initial} \geq 0 \tag{6.60}$$

Ela pode no máximo permanecer estacionária. No processo envolvendo a fusão de 2 Buracos Negros, o Buraco Negro que é formado possui área satisfazendo: $A_3 > A_1 + A_2$.

Qualquer diferença em energia, da situação inicial, versus a final, vai em ondas gravitacionais. A figura a seguir mostra um diagrama, com o tempo na vertical:

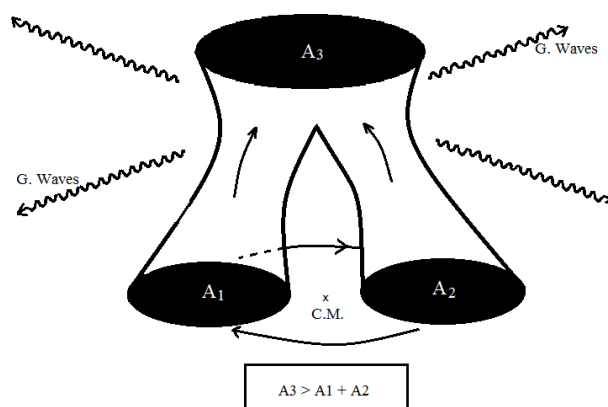



Figure 6.14: fusão de dois Buracos Negros gerando ondas gravitacionais

A figura acima é muito rica em detalhes: dois Buracos Negros se fundem em um maior. O distúrbio gerado no espaço-tempo produz ondas gravitacionais com frequência proporcional muito próxima da frequência angular orbital dos objetos.

Este processo dura muitos milhões de anos, mas na fase final, quando os buracos negros estão muito próximos, esta fase é extremamente rápida (frações de minutos ou segundos).

Em uma fração de segundo, um burst de ondas gravitacionais é liberado no espaço, e um Buraco Negro é formado a partir dos prévios. Em 2015, o experimento LIGO detectou um evento envolvendo dois buracos negros de imensa massa: um deles com $M > 30M_{\odot}$ e o outro com $M > 25M_{\odot}$. Para sermos mais exatos, o experimento em si consiste de 2 interferômetros

LASER separados por milhares de km nos USA (Hanford e Livingston). A necessidade de um segundo equipamento é para a confirmação da detecção de um fenômeno deste tipo (não ser devido a uma flutuação sísmica local por exemplo).

Estima-se que cerca de $E \sim 3M_\odot$ foi convertida em ondas gravitacionais neste evento!

6.7.3 Teorema das Áreas e o Processo Penrose

Em seguida, vamos usar o Teorema das Áreas para colocar um limite superior à extração de energia. Para um Buraco Negro de Kerr ($q = 0$), a área do seu horizonte é dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= 4\pi \left(r_+^2 + a^2\right) \\
r_+ &= \frac{r_g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r_g^2 - 4a^2}
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

é muito fácil manipulá-la para se obter:

$$
r_+^2 + a^2 = \frac{r_g^2}{2} + \frac{r_g^2}{2}\sqrt{1 - \frac{4a^2}{r_g^2}} \tag{6.62}
$$

inserindo: $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ e $a = \frac{J}{Mc}$ acima, obtém-se:

$$
A = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{cJ}{GM^2}\right)}\right] \tag{6.63}
$$

Vamos introduzir as unidades naturais para obtermos equações mais simples:

$$
A = 8\pi M^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M^2}\right)}\right] \tag{6.64}
$$

Primeiro: é muito fácil observar que alguns vínculos aparecem aqui: J tem um máximo dado por:

$$
J_{max} = \frac{G}{c}M^2 = M^2 \tag{6.65}
$$

Um Buraco Negro de massa M tem área máxima dada por: $J = 0$ e isto corresponde a: $A = 16\pi M^2$ e o valor mínimo é: $A = 8\pi M^2$ quando J alcança o seu máximo.

Nós agora começamos com um Buraco Negro de Kerr maximal ($J = J_{max}$) de massa inicial M_i e extraímos alguma energia a partir dele, usando o processo Penrose. Finalizado o processo, a massa do Buraco Negro é reduzida para M_f com $J = 0$.

A área inicial do Buraco Negro é:

$$A_i = 8\pi {M_i}^2 \tag{6.66}$$

quando: $J = J_{max}$, e a área final é: $A_f = 16\pi {M_f}^2$ (pois $J = 0$).

O sinal igual se aplica quando o Buraco Negro se estabelece como Schwarzschild após completar o processo de extração de energia, usando o mecanismo Penrose. Mas, pelo Teorema das Áreas temos: $A_f \geq A_i$ ou:

$$16\pi M_f^2 \geq 8\pi M_i^2 \tag{6.67}$$

então: $M_f \geq \frac{1}{\sqrt{2}} M_i$. Portanto, a energia extraída é:

$$E = M_i - M_f = M_i - \frac{1}{\sqrt{2}} M_i = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) M_i \sim 0.29 M_i \tag{6.68}$$

Consequentemente, no máximo 29% da massa-energia inicial M_i pode ser extraída de um Buraco Negro com rotação.

Observe que os Buracos Negros maximais (aqueles com maior momento angular) podem gerar mais suprimento de energia. O processo Penrose é entretanto impraticável, visto que ele exige uma sintonia muito forte no movimento e coordenação das partículas. É interessante notar que ele é muito eficiente, muito mais do que as reações nucleares que geram 5% no máximo.

6.8 Termodinâmica de Buracos Negros

6.8.1 Teorema das Áreas e Entropia

O Teorema das Áreas de Hawking abriu novas avenidas no estudo dos Buracos Negros. Algumas possibilidades surgem e os pesquisadores veem processos análogos em outras áreas da física. O comportamento de Buracos Negros é similar à entropia encontrada na termodinâmica.

Na termodinâmica, a entropia de sistemas fechados não diminui com o tempo. Em qualquer processo termodinâmico a entropia é sempre crescente (este fato é conhecido como a Segunda Lei da Termodinâmica).

$$dS = S_{final} - S_{initial} \geq 0 \tag{6.69}$$

A relação entre a entropia e calor é dada pela temperatura T, na escala absoluta (Kelvin):

$$TdS = dQ \tag{6.70}$$

A relação entre a energia interna E, entropia S e trabalho externo W sobre um sistema é dado pela Primeira Lei da Temrodinâmica:

$$dE = TdS + dW \tag{6.71}$$

onde dW tem sinal algébrico, dependendo se o sistema gera trabalho ou não. Para sistemas sob pressão constante escreve-se: $dW = PdV$ onde dV é a variação do volume. Se o sistema é fechado, nenhuma troca de calor e trabalho é permitida, portanto, $dE = 0$. Logo, a primeira lei da termodinâmica está relacionada à lei de conservação de energia.

Na Mecânica Estatística a entropia pode ser considerada como uma medida da desordem do sistema, ou a falta de informação de seu estado preciso. Conforme a entropia aumenta, a quantidade de energia disponível para processo útil é reduzida. A informação também é reduzida.

Esta medida aparece como uma função do número de microestados disponíveis no sistema e a constante de Boltzmann:

$$S(N) = k_B ln\left[\Omega(N)\right] \tag{6.72}$$

Onde: $\Omega(N)$ é o número de micro-estados do sistema e ele varia de sistema para sistema. Aqui: $ln[\Omega]$ denota o logaritmo natural argumento: Ω. Em Mecânia Estatística uma das questões mais fundamentais é calcular o número de micro-estados dado por $\Omega(N)$ em termos dos parâmetros do sistema.

A **Segunda Lei da Termodinâmica** estabelece que: em um sistema fechado, a variação da entropia total é sempre positiva:

$$dS \geq 0 \tag{6.73}$$

A similaridade desta lei com a lei das áreas ($dA \geq 0$), levou J.Beckenstein em 1972 a especular se poderíamos atribuir entropia aos Buracos Negros. Mas, como decorrência desta conjectura, se verdadeira, os Buracos Negros deveriam ter uma temperatura, que a eles fosse atribuída.

Lembre-se que Buracos Negros têm poucos parâmetros: massa, carga e momento angular, desta forma, se estes objetos possuem temperatura, esta deve depender apenas dos parâmetros acima. Como podemos calculá-la?

Observe que antes do colapso estelar, a estrela tem muitos parâmetros que a caracterizam, ou seja, muita informação. O colapso gravitacional reduz drasticamente esta informação e o estado final é um objeto extremamente

compacto com poucos parâmetros: (M, Q, J). Logo, uma grande quantidade de entropia foi gerada no colapso gravitacional, e isto nos leva a considerar que a entropia de um buraco negro seja proporcional à sua área (pois $dA \geq 0$).

Essas considerações (baseadas no Teorema das Áreas) sugere que a relação entre a área e entropia deve ser:

$$S = \frac{c^3 k_B}{4G\hbar} A = \frac{A}{4} \tag{6.74}$$

em unidades naturais considera-se que: $k_B = 1$.

Mas, a introdução de uma entropia a um buraco negro leva-nos a considerar que este objeto tem propriedades térmicas: logo, ele deve ter uma temperatura que lhe é associada. Mas, o que isto significa? Se um Buraco Negro é um objeto quente, ele deve irradiar como um corpo negro, mas como a radiação térmica pode escapar a partir dele? Isto parece confuso à primeira vista.

Neste momento entra em cena S.Hawking, que nos anos 70 pôde explicá-lo, de modo consistente. Ele o fez usando a mecânica quântica para analisar as partículas e campos próximos ao horizonte de eventos.

Na verdade, 'próximos' deve ser considerado como um abuso de linguagem, pois a interpretação correta do fenômeno de radiação a partir dos Buracos Negros envolve a mecânica quântica, e de acordo com esta teoria, não faz sentido encararmos o fenômeno do ponto de vista 'partículas saindo da superfície do Buraco Negro'. O fenômeno é mais sutil do que isso e envolve muitos elementos, um deles é o fato de que o colapso gravitacional 'espalha' as ondas e campos que vem do passado remoto, amplificando esses mesmos campos em direção ao futuro remoto. Desta forma, a irradiação Hawking é um efeito que depende da ocorrência do colapso e é de natureza global, envolve a métrica do buraco negro como um todo e o fato que o espaço é assintoticamente plano. Comentaremos mais sobre isso adiante.

6.8.2 Cálculo da Temperatura de um Buraco Negro

Em termodinâmica, existe uma relação entre temperatura, energia e entropia, dada por:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \tag{6.75}$$

para um sistema de volume fixo.

Logo, tendo as relações entre entropia e energia de Buracos Negros e se a analogia é correta, podemos estimar a temperatura de buracos negros. Um

corpo em equilíbrio térmico tem temperatura constante, mas para um Buraco Negro, quais são as suas propriedades uniformes?

Em 1973, J. Bardeen et al foram além com esta analogia: ele mostrou que a **gravidade de superfície** de um Buraco Negro:

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}$$

é uniforme em seu horizonte de eventos.

Estimulados por esta analogia, pode-se considerar que o horizonte de eventos possui uma temperatura bem definida. J.Bardeen, Hawking e colaboradores, consideraram que a gravidade de superfície é a propriedade análoga à temperatura.

Visto que a gravidade de superfície é inversamente proporcional à sua massa, e como a gravidade de superfície é proporcional à temperatura, segue-se que Buracos Negros menores serão mais quentes do que os maiores.

Usando o ansatz de que a entropia de um Buraco Negro é proporcional à sua área, pode-se deduzir sua temperatura usando a Termodinâmica.

A área é trivialmente dada por:

$$A = 4\pi {r_g}^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$$

Usando a eq.(6.71) podemos expressar a entropia como função da massa:

$$S(M) = \frac{4\pi k_B G}{c\hbar} M^2 \qquad (6.76)$$

calculando a derivada: $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$ e desde que $E = Mc^2$ isto nos leva a:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \sim 6.2 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{Kelvin} \qquad (6.77)$$

Em unidades naturais, a temperatura é expressa como:

$$T = \frac{1}{8\pi M} \qquad (6.78)$$

Logo, grandes Buracos Negros são mais frios do que os menores. A partir das expressões acima, podemos levantar uma comparação interessante, que será novamente explorada em mais detalhes adiante: a temperatura da radiação térmica de fundo, hoje, é aproximadamente $T_0 \sim 3K$.

Buracos Negros de massa estelar, têm massas típicas maiores do que $M \geq 4M_\odot$, ou seja, suas temperaturas são abaixo de $T \sim 10^{-8}K$. Desta forma, os Buracos Negros de origem estelar são muito mais frios do que a radiação térmica de fundo que preenche o universo, atualmente! De acordo

com a termodinâmica, calor flui de regiões quentes para regiões frias, desta forma, buracos negros de massa estelar absorvem calor a partir da radiação térmica de fundo e tendem a crescer (de modo muito lento, mas o fazem) conforme o tempo passa.

6.8.3 As quatro leis da Mecânica dos Buracos Negros

Seguindo as considerações acima e algumas hipóteses sobre o tensor energia-momento (condições de energia) podemos provar as 4 leis básicas:

o) se T_{ab} obedece à condição forte de energia, então a gravidade de superfície de um Buraco Negro k é constante sobre o horizonte de eventos.

1) se um Buraco Negro estacionário com massa M, carga Q, e momento angular J é perturbado, ele irá se estabelecer em um novo estado (novo buraco negro) com massa: $M + \delta M$, carga: $Q + \delta Q$ e momento angular: $J + \delta J$ de modo que a variação em sua massa é dada por:

$$dM = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega_h dJ + \Phi_h dQ \tag{6.79}$$

onde: k é a gravidade de superfície, Ω_h é a velocidade angular e Φ_h é o potencial elétrico.

2) se T_{ab} satisfizer à condição fraca sobre a energia, e se a Censura Cósmica é verdadeira, então a variação da área de um buraco negro é sempre positiva:

$$dA \geq 0 \tag{6.80}$$

A fusão de dois Buracos Negros leva a um novo Buraco Negro cuja área é maior do que a soma das áreas dos Buracos Negros antes da fusão.

3) a gravidade de superfície de um Buraco Negro κ não pode ser reduzida a zero por nenhuma sequência de processos clássicos. Ela é análoga à terceira lei que diz: ($T > 0$, para qualquer sistema).

As relações acima são muito semelhantes às da Termodinâmica, e podemos colocá-las em uma tabela:

Law	Termodinâmica	Buracos Negros
0	$T = cte.$	$\kappa = cte.$
1	$dE = TdS + dW$	$dM = \frac{\kappa dA}{8\pi} + \Omega_H dJ$
2	$dS > 0$	$dA > 0$
3	impossível atingir $T = 0$	impossível atingir $\kappa = 0$

A tabela mostra 4 leis muito semelhantes às leis encontradas no estudo dos buracos negros, desta forma, a analogia entre as mesmas é muito forte.

6.8.4 A segunda lei generalizada da Termodinâmica

Processos clássicos envolvendo Buracos Negros e suas colisões levam-nos a supor que a entropia total (matéria mais Buracos Negros) deve obedecer:

$$dS = dS_{matter} + dS_{bh} \geq 0 \tag{6.81}$$

Esta é a segunda lei generalizada da termodinâmica, tendo sido conjecturada por J.Bekenstein no anos 70.

Finalmente, podemos encerrar esta seção estimando a entropia de um Buraco Negro como função de sua massa:

$$S_{bh}(M) \sim 10^{77}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{2} \tag{6.82}$$

A partir desta estimativa, conclui-se que Buracos Negros Supermassivos (emboscados nos núcleos galáticos) têm muito mais entropia que toda a radiação térmica originada nos primórdios do Universo (CMBR). Numericamente falando, Buracos Negros são extremamente entrópicos.

Algumas profundas conexões entre o Universo e esses objetos podem ser conjecturadas: se alguma forma do Princípio Holográfico vale para o Universo, (tal conjectura afirma que há um limite superior à entropia do horizonte global, armazenada no mesmo) ele poderia restringir violentamente o número e a massa (uma combinação de ambos) de Buracos Negros Supermassivos que se encontram no núcleo das galáxias. Tais considerações podem ser vistas em P.S.Custodio and J.E.Horvath [3].

6.9 Buracos Negros podem irradiar?

6.9.1 Mecânica Quântica e Gravidade

A discussão da seção prévia sugere que a temperatura de um Buraco Negro é não nula, visto que ele possui entropia. Mas, se um Buraco Negro possui temperatura não nula, ele (necessariamente) deve irradiar! Todo corpo aquecido irradia energia.

Alguns fenômenos interessantes estão em ação: Buracos Negros clássicos absorvem matéria e radiação, e nada pode escapar deles.

Entretanto, nos anos 70, S.Hawking percebeu que esta conclusão não é válida se levarmos em conta a Mecânica Quântica.

Hawking investigou o comportamente de campos na vizinhança de Buracos Negros e ele descobriu que os Buracos Negros devem irradiar partículas

e com uma distribuição térmica para a energia dessas partículas. Esta descoberta abriu uma nova avenida de investigação para algums ligações entre a Gravidade, Mecânica Quântica e a Termodinâmica.

A emissão térmica de partículas, a partir de Buracos Negros, é denominada efeito Hawking ou radiação Hawking.

Este efeito envolve o vácuo como um sistema quântico contendo partículas e anti-partículas, permitidas pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg. De acordo com este princípio, o vácuo contém partículas e anti-partículas, que são continuamente criadas e destruídas. Em circunstâncias normais, elas não produzem efeitos mensuráveis.

O colapso gravitacional, dando surgimento a um Buraco Negro, cria um horizonte de eventos, polarizando o vácuo quântico, isto é: permitindo que um espectro térmico de partículas seja emitido a partir do Buraco Negro recém criado. Note que na frase acima, o **colapso gravitacional** em si é importante, adicionando-se o fato de que um horizonte de eventos foi criado: em outras palavras, o efeito Hawking depende do fato de que o Buraco Negro foi criado em algum momento passado, e portanto, ele não faz sentido para um Buraco Negro eterno.

O **Princípio de Incerteza de Heisenberg**, entre energia e tempo é:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \tag{6.83}$$

A partir de $E = mc^2$ pode-se escrever:

$$\Delta m \Delta t \geq \frac{h}{2\pi c^2} \tag{6.84}$$

O Princípio de Incerteza permite que partículas sejam criadas, mas o custo deste débito é pago pelo Buraco Negro que irá perdendo massa, de modo lento.

Neste processo, um observador remoto (com instrumentos) será capaz de detectar um espectro térmico de partíulas, provenientes do Buraco Negro.

Cálculos detalhados deste processo foram feitos por S.Hawking nos anos 70, onde ele determinou o número de partículas criadas por um Buraco Negro que:

1) foi formado em um tempo fixo e finito no passado,

2) considerando que o vácuo é quântico e

3) o campo gravitacional é clássico.

Esta é a aproximação semi-clássica denominada campos quânticos no espaço-tempo curvo, e foi iniciada nos anos 60 por Leornard Parker et al. Em geral, alguns processos que envolvem métricas dependentes do tempo e

campos quânticos (imersos nesses espaços) são capazes de criar partículas e o efeito Hawking é um deles.

O número de partículas criadas com energia fixa E por um buraco negro que se formou a algum tempo finito atrás, como função da energia e gravidade de superfície κ é:

$$N(E) = \frac{8\pi E^2}{c^3 h^3 \left(e^{\zeta E} - 1\right)} \tag{6.85}$$

onde:

$$\zeta = \frac{4\pi^2 c}{h\kappa(M)} \tag{6.86}$$

e, a gravidade de superfície é dada por:

$$\kappa(M) = \frac{c^4}{4GM}$$

Visto que esta expressão deve ser fornecida pela Termodinâmica, o lado direito é: $\frac{E}{k_B T}$ e portanto, podemos extrair a temperatura do Buraco Negro usando a relação:

$$\zeta E = \frac{E}{k_B T} \rightarrow T = \frac{1}{k_B \zeta} \tag{6.87}$$

Então, expressando-se ζ em termos de $\kappa(M)$ obtém-se:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8 k_B \pi G M} \sim 6.2 \times 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} \text{Kelvin} \tag{6.88}$$

em concordância com a eq.(6.74)!

Esta temperatura é muito baixa para Buracos Negros de massa estelar.

Os Buracos Negros de origem estelar absorvem muito mais energia térmica a partir do fundo (o espaço é preenchido com uma radiação térmica que se originou no início do Universo e tendo atualmente a temperatura: $T_{back} \sim$ 2.74K. Hoje, a temperatura de um Buraco Negro de massa estelar é muito menor do que a temperatura da radiação térmica de fundo:

$$T(M \sim 3M_\odot) << T_{back} \sim 2.74K$$

Uma vez que o calor flui de regiões mais quentes para as mais frias (Segunda Lei da Termodinâmica), os Buracos Negros de massa estelar absorvem a radiação térmica do fundo.

6.9.2 Buracos Negros perdem massa devido ao efeito Hawking

Se considerarmos o efeito da radiação, a lei de Stefan-Boltzmann pode ser usada para deduzir a perda de energia como função do tempo. De acordo com ela, a potência irradiada $\dot{E}$ é o produto da área pelo fluxo de energia: $\dot{E} = Area \times Flux$. A área de um buraco negro é dada por: $Area \propto M^2$ e o fluxo é proporcional à quarta potência da temperatura: $Flux \propto T^4$, logo, teremos:

$$\dot{M}c^2 = -4\pi {r_g}^2 \sigma T^4 \tag{6.89}$$

Inserindo a expressão para a temperatura eq.(6.33) e $r_g = 2GM/c^2$, teremos:

$$\dot{M} = -\frac{A}{M^2} \tag{6.90}$$

com: $A = 4.0 \times 10^{24} g^3 s^{-1}$.

A Equação Diferencial acima representa a derivada da massa do Buraco Negro com relação ao tempo, e visto ser negativo o lado direito, ela prevê uma redução contínua da massa de um buraco negro como sendo medida por um observador assintótico. Considerando que um dado buraco negro tenha se formado no instante $t = 0$ com massa inicial M_i, a massa $M(t)$ no instante t é:

$$M(t) = M_i \left[1 - \frac{3At}{M_i^3}\right]^{1/3} \tag{6.91}$$

Em algum momento ele pode se desintegrar completamente: $M(t) = 0$, portanto, o tempo de vida de um Buraco Negro contra a completa desintegração é dada pela sua massa inicial M_i quando o mesmo se forma:

$$\tau(M_i) \sim 14 \times 10^9 (M_i/M_{haw})^3 \text{anos} \tag{6.92}$$

onde: $M_{haw} = 1.7 \times 10^{14} g$.

Para um pequeno Buraco Negro com $M_i \sim M_{haw}$ isto corresponde a 14 bilhões de anos, aproximadamente o tempo de vida da porção observável do nosso universo. É notável que a fórmula acima implique que um Buraco Negro muito antigo, com esta massa, emita cerca de $E \sim 10^{22} J$, no seu último segundo, principalmente em raios gama de altíssima energia. Isto levanta a possibilidade da observação da explosão de pequenos Buracos Negros Primordiais, hoje.

6.10 Forças de maré em Buracos Negros

A gravidade é responsável por forças de maré.

Para compreendê-lo, considere uma nuvem de partículas, formando uma esfera, e inicialmente em repouso, longe da superfície da Terra.

Esta nuvem de partículas é inicialmente esférica. Conforme ela cai em direção à superfície, o seu formato desvia do esférico: ela se alonga em uma direção e comprime na outra, na direção vertical (o volume permanece o mesmo). Este é o efeito de maré.

Próximo de um Buraco Negro, este efeito é muito mais drástico, e a força de maré diverge como $r \to 0$. O destino de todo corpo sólido que atravesse o horizonte de eventos é atingir a singularidade (em um tempo finito do seu tempo próprio) onde as imensas forças de maré irão destruí-lo.

Com o objetivo de descrever este efeito, consideremos um 4-vetor η^a medindo a separação espacial das partículas que compõem um corpo em queda livre.

A **equação de desvio geodésico** é dada por:

$$\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd}v^b v^c \eta^d = 0 \tag{6.93}$$

Prova:

Calcule a segunda derivada absoluta, e expanda a mesma em termos da derivada covariante. Em seguida, use a definição do tensor de curvatura em termos do comutador:

$$\begin{aligned} D^2\eta^a &= DD\eta^a = \\ &= v^c\nabla_c\left(v^d\nabla_d\eta^a\right) = \\ &= \left(v^c\nabla_c v^d\right)\left(\nabla_d\eta^a\right) + v^c v^d\nabla_c\nabla_d\eta^a = \\ &= \left(v^c\nabla_c v^d\right)\left(\nabla_d\eta^a\right) + v^c v^d\left[\nabla_d\nabla_c\eta^a + R^a_{cde}\eta^e\right] \end{aligned} \tag{6.94}$$

onde foi usado: $\nabla_c\nabla_d\eta^a = R^a_{cde}\eta^e + \nabla_d\nabla_c\eta^a$. Agora, o primeiro termo é nulo, pois v^d, v^c satisfaz à equação de desvio geodésico.

Portanto, obtém-se:

$$D^2\eta^a = \frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} = R^a_{cde}v^c v^d\eta^e \tag{6.95}$$

Onde no último passo nós voltamos à notação em termos do parâmetro τ.

A separação 'horizontal' η^a depende da curvatura do espaço-tempo, dada por: R^a_{bcd}. A segunda taxa de variação de η^a é proporcional à curvatura.

Os termos: $v^b v^c$ na eq.(84) são as 4-velocidades das partículas, tangentes às geodésicas tipo-tempo.

Partindo-se da métrica de Schwarzschild, podemos decompô-la em 4-tetradas como:

$$e^a{}_0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} (1, 0, 0, 0) \tag{6.96a}$$

$$e^a{}_1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} (0, 1, 0, 0) \tag{6.96b}$$

$$e^a{}_2 = \frac{1}{r}(0, 0, 1, 0) \tag{6.96c}$$

$$e^a{}_3 = \frac{1}{rsin(\theta)}(0, 0, 0, 1) \tag{6.96d}$$

Considera-se que a é um índice tensorial, enquanto $0, 1, 2, 3$ não são. Definindo as componentes espaciais: $\left(\eta^r, \eta^\theta, \eta^\phi\right)$ podemos abrir a eq.(6.92) como:

$$\frac{D^2\eta^r}{D\tau^2} = +\frac{2m}{r^3}\eta^r \tag{6.97a}$$

$$\frac{D^2\eta^\theta}{D\tau^2} = -\frac{m}{r^3}\eta^\theta \tag{6.97b}$$

$$\frac{D^2\eta^\phi}{D\tau^2} = -\frac{m}{r^3}\eta^\phi \tag{6.97c}$$

O lado esquerdo das equações acima são as acelerações relativas das partículas (ou geodésicas), portanto, conforme $r \to 0$, cada um deles diverge. Então, as imensas forças de maré na singularidade de um Buraco Negro irão rasgar em pedaços qualquer corpo sólido que por ventura tenha atravessado o horizonte de eventos.

A figura a seguir mostra um intrépido astronauta que se aproxima rapidamente da singularidade de um Buraco Negro de Schwarzschild.

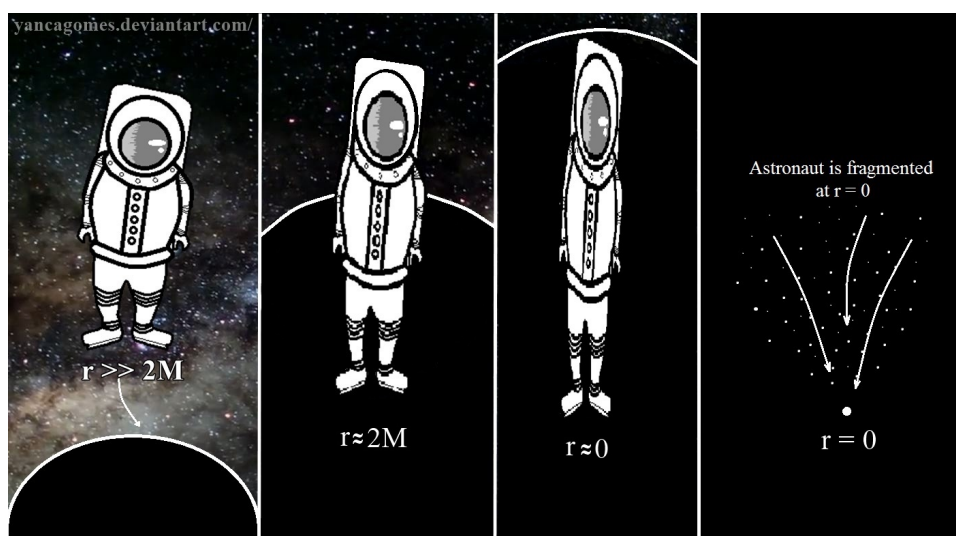



Figure 6.15: um intrépido astronauta que cai em direção de: $r = 0$

Na próxima seção iremos analisar o comportamento dos cones de luz e observadores que viajam próximos de Buracos Negros (e alguns intrépidos que se aventuram a entrar nos Buracos Negros).

6.11 Intrépidos astronautas que se aventuram perto de Buracos Negros!

O espaço-tempo é 4D, então, os nossos diagramas e imagens devem ser esquemáticos: o tempo é representado na vertical. Abaixo, desenhamos um diagrama dividindo o espaço-tempo em torno de um Buraco Negro e suas regiões: a superfície (horizonte de eventos), a singularidade (linha vertical no centro), o interior e a região exterior.

Um Buraco Negro de Schwarzschild não possui rotação e tão pouco carga elétrica.

O único parâmetro que o descreve é a massa m. Desta forma, este buraco negro tem horizonte de eventos esférico. Observe no entanto, que o horizonte de eventos não é uma superfície sólida: nada pode se apoiar nesta posição, não há nada ali.

De fato, toda a matéria da estrela que deu origem ao Buraco Negro, cai na singularidade $r = 0$.

Esta singularidade é oculta do mundo exterior devido ao horizonte de eventos, que deste ponto de vista pode ser considerado como uma membrana. Esta 'membrana' separa as partículas: aquelas que a cruzam jamais irão

retornar à região exterior.

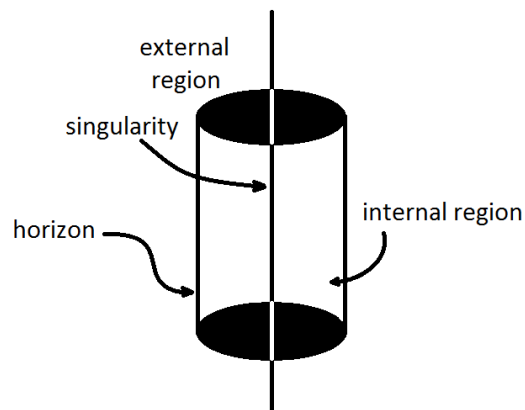



Figure 6.16: principais regiões contendo um Buraco Negro

A figura seguinte mostra os cones de luz em torno de um Buraco Negro. A curvatura do espaçø-tempo desvia a direção dos cones de luz que se localizam em diferentes distâncias do Buraco Negro (note que este desvio em si, é sob a óptica da perspectiva do sistema de coordenadas de Schwarzschild, em outros sistemas, não há este desvio, mas as regiões dos diagramas de Penrose são deformadas de modo a compensá-lo).

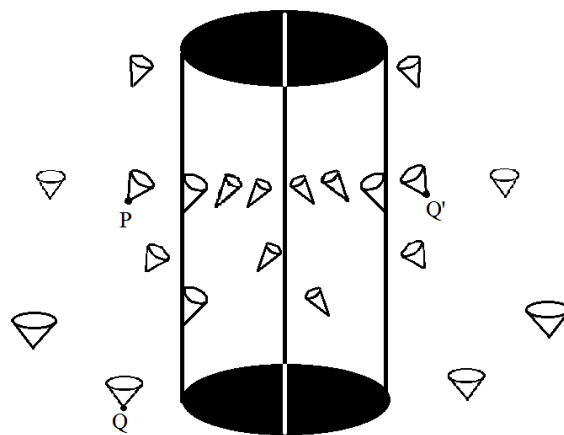



Figure 6.17: cones de luz em torno de um Buraco Negro

Os cones de luz são muito importantes pois o movimento físico de partículas é permitido apenas dentro dos seus cones de luz, devido ao limite superior imposto pela velocidade da luz. Os cones de luz descrevem a estrutura causal do espaço-tempo e eles são influenciados pela curvatura do mesmo.

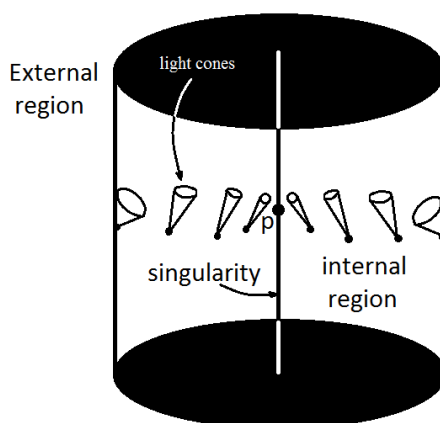



Figure 6.18: cones de luz dentro de um Buraco Negro

A próxima figura é muito relevante: ela mostra 3 observadores em ação! O observador C é um intrépido astronauta, pois ele decide cruzar o horizonte de eventos. O observador A continua a sua trajetória a uma distância segura do Buraco Negro, e B aproxima-se dele e retorna.

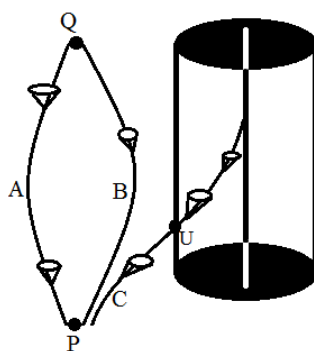



Figure 6.19: a trajetória de 3 observadores movendo-se próximos de um Buraco Negro

Há um ponto muito relevante aqui: a distorção gravitacional no tempo é levada em conta, no diagrama: observe que a inclinação do cone de luz de B impede que o astronauta alcance qualquer outro ponto que ele deseje.

Ele alcança um ponto muito remoto no tempo, na primeira trajetória (aquela seguida por A), no ponto q. Se o observador B circular o Buraco Negro, muito próximo deo seu horizonte de eventos, a distorção gravitacional do tempo será muito forte. Ao se afastar do Buraco Negro, ele irá alcançar o futuro remoto de A (o seu tempo próprio passou em um ritmo muito diferente).

Nestas circunstâncias B viaja ao futuro de A (esta viagem não pode ser revertida a um tempo prévio). A estrutura global do espaço-tempo proíbe a existência de curvas tipo-tempo fechadas, logo, a a viagem ao passado é proibida.

A figura 6 mostra que o cone de luz aponta em direção da singularidade. Este é o aspecto formal que define o Buraco Negro como uma região de não-retorno para todas as partículas e observadores que cruzarem o horizonte de eventos em $r = 2M$.

Na prática, é muito perigoso permanecer próximo do horizonte de eventos de um Buraco Negro, pois o mesmo irá se deformar e a trajetória de observadores próximos é muito instável (devido à curvatura do espaço-tempo).

A distorção é muito pequena, mas ela pode ser suficiente para capturar um intrépido astronauta que viaje muito próximo de um Buraco Negro. Desta forma, é mais seguro mover-se longe de um Buraco Negro, relativo ao parâmetro de impacto: $r = 2M = \frac{2GM}{c^2}$.

Considere que o movimento de partículas próximas de um Buraco Negro é instável, devido à forte curvatura do espaço-tempo.

Estas conclusões são muito gerais e valem para qualquer tipo de Buraco Negro.

6.12 Buracos Negros Primordiais

Buracos Negros Primordiais (PBHs) são Buracos Negros que surgiram a partir de violentas flutuações na métrica quando o universo era muito jovem. B.Carr e S.Hawking nos anos 70 deduziram que flutuações da ordem de:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) \sim \frac{1}{3}$$

são suficientes para criar um PBH com tamanho do horizonte de Hubble.

Tais objetos eram muito pequenos e devido a efeitos quânticos eles também devem ser muito quentes. Uma vez que o universo primordial era preenchido com radiação térmica de alta temperatura, uma questão muito interessante pode ser levantada: tais objetos poderiam absorver a energia de fundo de modo a evitar a desintegração completa?

Algumas considerações numéricas e memo analíticas mostrarm que esta hipótese é implausível: a taxa de ganho de massa a partir do fundo é muito lenta, e mesmo aqueles PBHs que conseguiram sobreviver à evaporação Hawking, têm quase a mesma massa inicial.

Com o objetivo de estimar como isto acontece, deve-se considerar um modelo com evaporação Hawking e ganho de massa a partir do ambiente. A equação diferencial completa para o modelo é:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{A}{M^2} + F(T)Area(M) \tag{6.98}$$

onde: $Area(M)$ é a área de um PBH com massa M e $F(T)$ é o fluxo térmico que atravessa o horizonte e é responsável pelo ganho de massa.

Tais quantidades são proporcionais a: $F(T) \propto T^4$ e $Area(M) \propto M^2$.

O equilíbrio acontece quando a temperatura do Buraco Negro é igual à do 'fundo': $T_{back} = T_{bh} \propto 1/M$.

Esta linha divisória corta os PBHs em dois regimens de crescimento: aqueles que são muito frios, daqueles que são mais quentes do que o 'fundo'. A linha divisória é obtida resolvendo-se:

$$-\frac{A}{M^2} + F(T)Area(M) = 0 \tag{6.99}$$

A solução da eq.(7.64) é denominada **massa crítica**: $M_c(T)$ e será calculada adiante.

De acordo com P.Custodio e J.Horvath, a possibilidade de PBHs crescerem em um ritmo muito rápido (se comparado à taxa de expansão do Universo) é muito improvável. Este resultado é sólido o suficiente, mesmo levando-se em conta os valores dos parâmetros cosmológicos tais como a temperatura e densidade no instante de sua formação, considerando-se que $M > M_c(t)$.

Primeiro caso: $M << M_c$

Considerando-se que o espectro é térmico, usa-se a lei de Stefan-Boltzmann: $F(T) \propto T^4$. Inserindo esta relação e convertendo pelo fator c^2, obtém-se:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\sigma T^4}{c^2}A \tag{6.100}$$

onde a área é dada por: $A = 4\pi {r_g}^2$. Visto que o raio é: $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, inserindo estas relações nas eqs. acima, obtém-se:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{A}{M^2} \tag{6.101}$$

onde: $A = 4 \times 10^{24} g^3 s^{-1}$.

Esta fórmula prevê que a massa evolui como:

$$M(t) = M_i \left[1 - \frac{3A}{M_i^3} t \right]^{1/3} \quad (6.102)$$

onde $M(0) = M_i$ é a massa do PBH no instante de sua formação.

No momento não se sabe se este comportamento ainda vale quando a massa é próxima da massa de Planck: $M \sim M_{pl}$ pois efeitos sutis no regime da gravidade quântica podem mudar este quadro.

Segundo caso: $M > M_c$

Agora, deve-se levar em conta o ganho de energia: uma vez que o Buraco Negro está imerso em um banho térmico à temperatura T. Este ganho deve ser proporcional ao produto da área e o fluxo de energia que atravessa o horizonte:

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi {r_g}^2 \frac{\sigma T^4}{c^2} \quad (6.103)$$

onde a temperatura é determinada pelo 'fundo' denotando-se por: $T_{back}(t)$.

A variação total da massa é obtida somando-se ambos os termos acima:

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_{total} = \left(\frac{\sigma A}{c^2} \right) ({T_{bh}}^4 - {T_{back}}^4) \quad (6.104)$$

Ou expressando o lado direito em termos da massa do Buraco Negro:

$$\left(\frac{dM}{dt} \right) = -\frac{A}{M^2} + BM^2 T^4 \quad (6.105)$$

com $B = 5.4 \times 10^{-81} g^{-1} s^{-1} K^{-4}$ se a massa e temperatura são medidas em g e Kelvin, respectivamente.

Denomina-se **massa crítica** ao PBH cuja temperatura Hawking é igual à temperatura da radiação térmica de fundo: $T_{back} = T_{bhole}$. Quando isto ocorre, a derivada total da massa do PBH é: $\dot{M} = 0$.

Resolvendo-se: $\frac{dM}{dt} = 0 \to M_c = \frac{(A/B)^{1/4}}{T}$, iremos obter que a massa crítica é numericamente dada por:

$$M_c(T) \sim \frac{1.64 \times 10^{26} g}{(T_{back}/K)} \quad (6.106)$$

Como resultado, **Buracos Negros Estelares** são muito frios e a evaporação Hawking é desprezível para esta classe de Buracos Negros.

Para comparar a evaporação Hawking com a abosrção clássica, podemos escrever a eq.(7.28) em função da massa crítica:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{A}{M^2}\left[-1 + \left(\frac{M}{M_c}\right)^4\right] \tag{6.107}$$

Desta forma, se o Buraco Negro tem massa $M \geq 10M_c$ em algum momento, o termo de absorção é 10^4 vezes mais relevante do que o de evaporação: $\dot{M}_{abs} \sim 10^4\dot{M}_{evap}$.

A existência de PBHs lança diversos vínculos e consequências astrofísicas. Se a radiação Hawking é levada em conta, pequenos PBHs formados na era da radiaça ao poderiam estar explodindo hoje, como surtos de raios gamma. Considerando-se que alguma massa é obtida do fundo de radiação, PBHs naquela época devem ser um pouco menores do que a previsão original de Hawking de $M \sim 10^{15}g$.

Se considerarmos a eq.(7.70), a escala de tempo para desintegração completa de um PBH com massa M_i que surge quando $M_i < M_c(t_i)$ e $\rho_{rad} = \rho_{rad}(t_i)$ é dada por:

$$t_{evap}(M_i, \rho_{rad}) \sim \frac{M_i^3}{3A}\left[1 + \frac{M_i^4}{7A}B\rho_{rad}(t_i)\right] \tag{6.108}$$

A figura a seguir mostra a evolução da Massa Crítica na Era da Matéria:

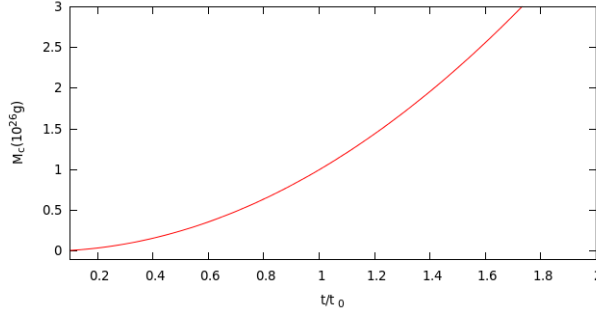



Figure 6.20: Massa Crítica evoluindo hoje

Recupera-se a escala de tempo de desintegração completa se $\rho_{rad}(t_i) = 0$ como deveria ser. Um PBH de massa $10^{13}g$ pode estar explodindo agora, se ele ganhou alguma massa some naquele período, portanto nossa janela de busca por PBHs explodindo hoje, está vinculada a objetos inicialmente um pouco menores, veja P.S.Custodio e J.Horvath [10].

Chapter 7

A evolução de estrelas em objetos compactos

7.1 A trajetória evolucionária das estrelas

7.1.1 Proto-estrela

Vamos realizar um resumo da evolução estelar: o processo de formação estelar se inicia quando uma nuvem de gás começa a se contrair, sob o seu próprio peso. Conforme ela se contrai, a energia potencial da nuvem é convertida em calor e ela se aquece. Como consequência, a pressão interna se eleva a detém o colapso. Uma vez que a temperatura da nuvem é muito maior do que o meio circundante, ela perde energia para o espaço e a contração prossegue.

Conforme ela se contrai, o centro torna-se mais e mais quente. Se a massa é grande o suficiente, o centro pode atingir milhões de graus Kelvin. Reações nucleares começam a ocorrer. O hidrogênio é convertido em hélio, liberando energia na forma de calor e pressão.

No nível mais elementar, este processo gera o fóton (responsável pela luz, calor e pressão térmica) e neutrinos (partículas muito elusivas, da interação fraca).

A energia irradiada a partir da superfície é balanceada pelas reações nucleares que ocorrem no seu centro. A nuvem de gás não contrai mais pois há suporte agora, para ser estabilizada: o peso das camadas é equilibrado pela pressão de gás ideal, que é originado da conversão de hidrogênio em hélio.

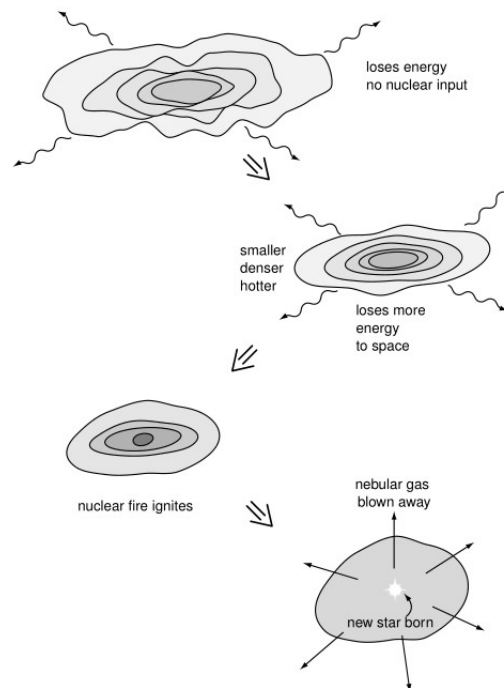



Figure 7.1: uma proto-estrela contraindo-se lentamente

7.1.2 Sequência Principal: energia total

Uma vez formada, a estrela entra na fase denominada sequência principal: uma fase estável que dura diversos bilhões de anos durante a qual o hidrogênio é convertido em hélio, no centro da estrela.

Neste ponto, nós definimos uma estrela como um objeto tal que: 1) é limitada pela auto-gravidade, 2) irradia energia suprida pela fonte interna de calor através de reações nucleares que ocorrem no seu centro.

Esta definição implica que estrelas evoluam no tempo: mudanças ocorrem na sua estrutura, composição ou ambos.

Em estrelas ordinárias como o Sol, o puxão gravitacional devido ao peso das camadas da estrela é equilibrado pelo excesso de pressão do interior extremamente quente. Em outras palavars, é a energia térmica do seu interior que se equilibra com a gravidade, definindo o tamanho e brilho da estrela.

É importante salientar que: as estrelas surgem em regiões de diferente metalicidade na galáxia, de modo que mesmo duas estrelas de mesma massa podem evoluir de modo um pouco diferente, se uma delas tem uma metalicidade muito diferente da outra quando ela se formou. Isto se deve ao fato de que a opacidade e a transferência de energia radiativa dependem deste detalhe. Não iremos entrar em todos esses detalhes, mas a bibliografia mais

avançada sobre este tema é indicada no final do livro.

Dando prosseguimento, espera-se que a energia térmica total deve ser da mesma ordem que a energia gravitacional. Isto pode ser deduzido rigorosamente da equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \tag{7.1}$$

Podemos multiplicar ambos os lados por: $4\pi r^3 dr$ e então integrar a partir do centro da estrela: $r = 0$ até o seu raio: $r = R$.

$$\int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = -\int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} 4\pi r^3 dr \tag{7.2}$$

Integrando-se por partes o lado esquerdo, obtém-se:

$$4\pi R^3 P(R) - 4\pi 0^3 P(0) - \int_0^R 3P(r) 4\pi r^2 dr = -\int_0^R 3P(r) 4\pi r^2 dr \tag{7.3}$$

visto que: $P(R) = 0$. Por outro lado, o lado direito é:

$$-\int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r} 4\pi r^2 dr = -\int_0^R \frac{GM(r)}{r} dm = E_g \tag{7.4}$$

onde: E_g é a energia gravitacional da estrela.

Uma vez que o gás é ideal, nós temos as relações: $P(r) = nk_B T(r)$ e a energia térmica por unidade de volume é: $u(r) = \frac{3}{2} nk_B T(r)$. Integrando u obtemos:

$$E_{thermal} = \int_0^R \frac{3}{2} nk_B T(r) 4\pi r^2 dr = \frac{3}{2} \int_0^R P(r) 4\pi r^2 dr = -\frac{E_g}{2} \tag{7.5}$$

Portanto, a energia total de uma estrela é a soma: energia gravitacional mais a energia térmica, o que fornece:

$$E = E_{thermal} + E_g = \frac{1}{2} E_g < 0 \tag{7.6}$$

Isto implica em que o calor específico $C = \frac{\partial E}{\partial T}$ de uma estrela seja negativo! Se você acrescentar massa-energia a uma estrela, ela irá esfriar! Se a estrela perde energia, ela se aquece.

7.1.3 Sequência principal: luminosidade e tempo de vida

A principal propriedade observável de uma estrela é a sua luminosidade. A luminosidade do Sol é: $L_\odot = 3.85 \times 10^{26} Js^{-1}$. A lei de Stefan-Boltzmann relaciona a temperatura efetiva de uma estrela (atmosfera) ao seu raio R por:

$$L = 4\pi R^2 \sigma {T_{eff}}^4 \tag{7.7}$$

onde: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ e a temperatura efetiva deve ser medida em Kelvin.

Usando a lei de Wien nós podemos estimar a temperatura efetiva: $\lambda_{max} T = 0.29 cmK$, onde: λ_{max} é o comprimento de onda onde ocorre o máximo.

A observação de milhares de estrelas coloca o intervalo de λ_{max} entre o infravermelho e o seu limite superior nos raios-X moles. A teoria das reações nucleares aplicada às estrelas mostra que a luminosidade de uma estrela é proporcional à sua massa: $L \propto M^\nu$, onde ν pertence ao intervalo: $[3, 5]$.

Para deduzirmos esta relação, vamos escrever as equações de estrutura estelar, levando-se em conta a taxa de geração de energia.

As equações de estrutura estelar são dadas pelo conjunto:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{7.8a}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \tag{7.8b}$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(T, \rho, X) \tag{7.8c}$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{\rho} \frac{dP}{dr} \tag{7.8d}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\rho(r)\chi}{4 a_B c T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \tag{7.8e}$$

onde: $L(r)$ é a luminosidade, $M(r)$ é a massa contida até r, $\rho(r)$ é a densidade. A função: $\epsilon(T, \rho, X)$ é a **taxa de geração de energia** que é determinada a partir de um modelo para as reações termonucleares, $T(r)$ é a temperatura e γ é o índice adiabático.

Nota-se que ϵ foi definido de modo a extrair a proporcionalidade entre a luminosidade produzida em r: $L(r)$ e $\rho(r)$. Então, esta taxa de geração de energia inclui (em nível elementar) a contribuição dos fótons (apenas eles).

Para obtermos soluções para essas equações, devemos providenciar condições de contorno para elas. Elas são:

$$M(0) = 0 \tag{7.9a}$$
$$L(0) = 0 \tag{7.9b}$$
$$\rho(R) = 0 \tag{7.9c}$$
$$T(R) = 0 \tag{7.9d}$$

onde R é o raio da estrela.

7.1.4 Sequência Principal: uma estimativa da relação M versus L

Infelizmente, não muito progresso pode ser feito analiticamente, mas soluções numéricas são fáceis de serem obtidas. Para deduzirmos uma estimativa grosseira para a luminosidade-massa, usamos uma média espacial. Não é rigorosa, mas é muito eficiente para se inferir algum comportamento global. A primeira equação pode ser mediada para:

$$\frac{P}{R} \propto \frac{M}{R^2}\rho \tag{7.10}$$

a partir da qual: $P \propto \frac{M^2}{R^4}$.

Se considerarmos um gás ideal, pode-se escrever: $P \propto \rho T$, então:

$$P \propto \frac{M}{R^3}T \tag{7.11}$$

o que implica: $T \propto \frac{M}{R}$. Se nós considerarmos a opacidade χ como uniforme, poderemos escrever também:

$$\frac{T}{R} \propto \frac{M}{R^3T^3}\frac{L}{R^2} \tag{7.12}$$

do que se obtém:

$$L \propto \frac{(TR)^4}{M} \to L \propto M^3 \tag{7.13}$$

visto que: $TR \propto M$.

Esta é a relação massa-luminosidade e ela mostra que as estrelas mais massivas brilham mais. Note que cálculo mais detalhados não estão longe desta estimativa: $L \propto M^{\nu}$, com ν de 3 a 5 em alguns casos.

Dando prosseguimento, visto que temos a relação massa-luminosidade, é muito fácil estimar o tempo de vida de uma estrela.

A fração da massa de uma estrela que é convertida em energia, pelas reações nucleares em seu centro é $\zeta M c^2$, logo, dividindo-se tal valor pela luminosidade, obtém-se uma estimativa para o seu tempo de vida:

$$\tau \propto \frac{\zeta M c^2}{L(M)} \propto M^{-(\nu-1)} \tag{7.14}$$

onde: $\zeta \sim 0.15$ é a fração da massa total que queima no núcleo da estrela. Se nós inserirmos os melhores parâmetros e estimativas acima, iremos obter o valor:

$$\tau \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-(\nu-1)} \text{ anos} \tag{7.15}$$

Portanto, as estrelas de grande massa vivem menos.

7.1.5 Sequência Principal: reações nucleares no interior estelar

Como vimos, a taxa de geração de energia $\epsilon(T, \rho, X)$ é explicada pelas reações termonucleares que ocorrem no núcleo da estrela. Para compreendê-lo, nós devemos conhecer o básico das reações nucleares, tema a ser abordado nesta seção.

Considere um núcleo com massa atômica A (prótons mais nêutrons) e de número atômico Z. A massa do núcleo é menor do que a massa combinada dos prótons e nêutrons (desde que eles não estejam em interação). A diferença é a energia de ligação do núcleo, e ela é dada por:

$$E_B = [Z m_p + (A - Z) m_n - m_{nuc}]\, c^2 \tag{7.16}$$

Podemos dividí-la pelo número de nucleons para determinar a energia por nucleon:

$$f = \frac{E_B}{A} \tag{7.17}$$

Se realizarmos o gráfico da curva da função f contra o número A, veremos que existe um pico próximo do núcleo do ferro:

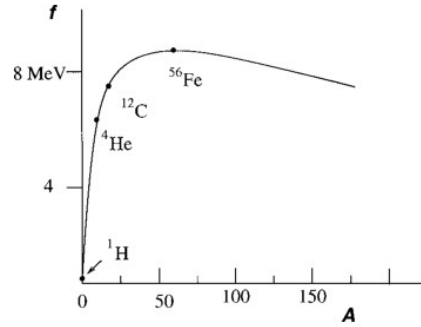



Figure 7.2: a partir do Fe, as reações são endotérmicas!

A geração de energia ocorre pela fusão de núcleos mais leves ou pela fissão (quebra) de núcleos mais pesados em mais leves (além do ferro). Mas, muitos argumentos teóricos e observacionais apontam que a fonte de energia das estrelas é proveniente da fusão nuclear, e não da fissão.

Se calcularmos f para o hélio, iremos obter: $f = 6.6MeV$, que é cerca da 0.007 vezes a massa de um nucleon. Portanto, se nós convertermos uma massa $M_\odot$ de hidrogênio em hélio, a quantidade de energia é $0.007M_\odot c^2$. Se dividirmos esta quantidade pela luminosidade $L_\odot$, iremos obter uma estimativa do tempo de vida de uma estrela que queima hidrogênio em hélio:

$$\tau_{nuc} \sim 0.007 \left(\frac{M_\odot c^2}{L_\odot} \right) \tag{7.18}$$

Ao se inserir os valores de $M_\odot$ and $L_\odot$, obtém-se a estimativa:$\tau_{nuc} \sim 10^{11}$ anos. Se considerarmos que a fração real que queima no centro da estrela corresponde a 10 a 15% da massa total, iremos obter o resultado correto, mudando 0.007 para 0.0007 acima (ou colocando um fator numérico).

Agora, para uma estrela arbitrária, temos: $L \propto M^\nu$, e usando a informação, podemos inseri-la acima e obter uma estimativa:

$$\tau \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-(\nu-1)} \text{anos}$$

que concorda com a estimativa dada na eq.(7.15). A figura seguinte mostra a região mais interna do centro de uma estrela onde as reações nucleares ocorrem:

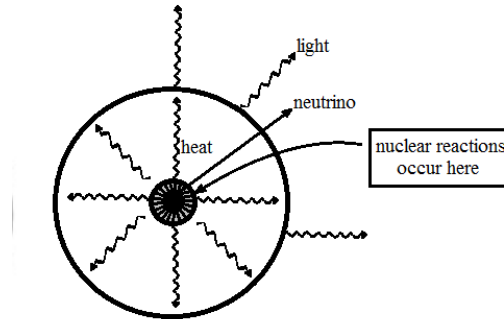



Figure 7.3: reações nucleares ocorrem na porção mais central

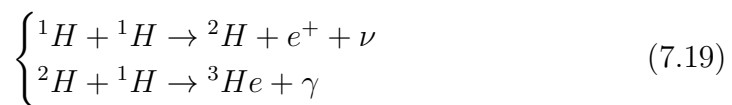
O diagrama acima mostra o núcleo de uma estrela típica. Em seu centro, as reações termonucleares liberam fótons (responsáveis pelo calor e pressão térmica) e neutrinos.

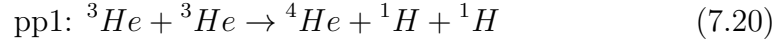
A opacidade χ do interior estelar evita que os fótons saiam rapidamente: eles espalham diversas vezes e o tempo médio para escaparem do seu centro é de milhares de anos. Por outro lado, os neutrinos saem imediatamente (limitados apenas pela velocidade da luz).

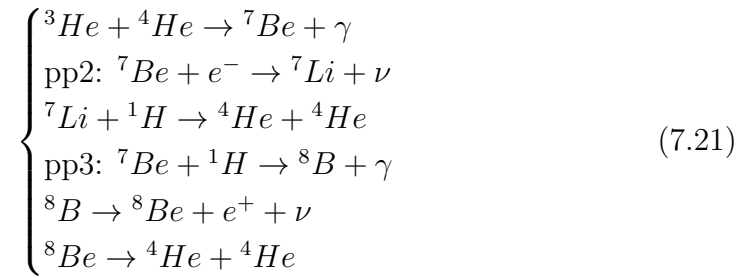
Para finalizarmos esta seção, lembremos que as reações nucleares não ocorrem de uma vez: os prótons são carregados, e portanto, há uma barreira repulsiva (cargas iguais se repelem) que deve inibir as reações. Do ponto de vista clássico, as estrelas não deveriam existir, devido a esta barreira. No entanto, há uma pequena probabilidade (tunelamento) prevista pela Mecânica Quântica, onde as partículas podem superar esta barreira e realizar a reação. Na verdade, no Sol, cerca de 10 bilhões de colisões por segundo por centímetro cúbico são necessárias para a formação de um núcleo de Hélio. Isto totaliza cerca de 500 milhões de toneladas de hidrogênio sendo convertidos em Hélio, a cada segundo.

7.1.6 Sequência Principal: cadeia p-p

No final dos anos 30, a física nuclear tinha desenvolvido ferramentas para compreender as principais reações dentro das estrelas. Hans Bethe em 1938 propusera a cadeia p-p como o mecanismo de geração de energia (não há apenas esta cadeia como iremos ver). As reações que a definem são:

$$\begin{cases} {}^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu \\ {}^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma \end{cases} \tag{7.19}$$

Após a produção de ^3He, as reações podem prosseguir através de 3 canais (ramos): pp1, pp2 e pp3. Nas condições solares de temperatura e pressão, o ramo pp1 domina. Ele envolve 2 núcleos de ^3He produzindo um núcleo de ^4He:

$$\text{pp1: } {}^3He + {}^3He \to {}^4He + {}^1H + {}^1H \tag{7.20}$$

Como resultado líquido, quatro núcleos de ^1H combinam para formar um de ^4He. Os outros ramos pp2 e pp3 começam a dominar somente quando a temperatura está acima de $10^7 K$. Agora, as reações são dadas por:

$$\begin{cases} {}^3He + {}^4He \to {}^7Be + \gamma \\ \text{pp2: } {}^7Be + e^- \to {}^7Li + \nu \\ {}^7Li + {}^1H \to {}^4He + {}^4He \\ \text{pp3: } {}^7Be + {}^1H \to {}^8B + \gamma \\ {}^8B \to {}^8Be + e^+ + \nu \\ {}^8Be \to {}^4He + {}^4He \end{cases} \tag{7.21}$$

Agora, a nossa tarefa é encontrar a função de geração de energia ϵ para toda a cadei de reações acima. Como podemos calculá-lo?

Observe que a primeira reação libera um neutrino ν. Então, este processo envolve a interação fraca, e é um processo lento definido por uma seção de choque pequena para a reação. Muito embora as outras reações sejam mais rápidas, elas não podem prosseguir sem a produção do deutério: ^2H. Desta forma, a taxa global das reações nucleares é determinada pela reação mais lenta. Agora, é necessário adicionar as energias liberadas em cada reação. A demonstração da equação para a taxa de reações envolve muita análise e iremos omití-la aqui.

A taxa de geração de energia é dada por:

$$\epsilon_{pp}(T, \rho, X) = C\rho X^2 T_6{}^{-2/3} e^{-33.8 \times T_6^{-1/3}} \text{Watts}/kg \tag{7.22}$$

onde: $C = 2.4 \times 10^{-1}$, $T_6 = \frac{T}{10^6 K}$ e X é a fração de hidrogênio. Essencialmente, com escolhas adequadas dos parâmetros ρ e T estima-se que ~ 500 milhões de toneladas de hidrogênio são convertidos em hélio, por segundo, no nosso Sol.

Não é difícil deduzir que em algum ponto, uma grande quantidade de hélio será acumulada no centro da estrela. Neste caso, as condições globais começam a mudar. Nas reações descritas nas eqs.(7.21) o γ representa o fóton. O fluxo de fótons que é gerado no núcleo é o responsável pela pressão térmica e a energia que é liberada a partir dele.

7.1.7 Sequência principal: neutrinos também são liberados!

A outra partícula liberada no núcleo é o neutrino μ.

A **seção de choque** $\sigma(E)$ da interação do neutrino com a matéria é muito baixa. Deste modo, esta partícula é muito elusiva e é muito difícil detectá-la. Entretanto, no Japão, existe um experimento que foi capaz de detectá-los. Estas partículas interagem tão fracamente com a matéria que eles são capazes de atravessar a Terra sem disparar uma única reação (uma colisão com um núcleo).

Alguns experimentos detectam alguns neutrinos, desde que eles interagem com o núcleo do Cloro Cl e geram Argônio como sub-produto. A reação é:

$$^{37}Cl + \nu \rightarrow {}^{37}Ar + e^- \qquad (7.23)$$

Observe que os neutrinos não irão interagir com todos os núcleos de Cloro: na prática, a partir da seção de choque da interação, os físicos estimam a quantidade razoável de Cloro (algumas toneladas) para que ocorram alguns eventos por mês e possam fazer um monitoramento dos eventos. A quantidade de neutrinos concorda com os mehores modelos do núcleo do Sol, embora algumas discrepâncias tenham sido notadas.

Finalizando esta seção, concluímos que: quanto mas massiva é a estrela, mais curta será a sua fase na sequência principal: a taxa das reações nucleares será mais rápida, com o objetivo de gerar pressão suficiente para estabilizar o tamanho de uma estrela que é mais massiva.

7.1.8 Deixando a sequência principal

Eventualmente, um grande núcleo de hélio é sintetizado no centro da estrela. Algum hidrogênio está ainda queimando em uma camada fora deste caroço de hélio.

Agora, o núcleo de hélio da estrela é semelhante à fase original de proto-estrela. Reações nucleares param neste momento, e o núcleo começa a contrair devido à gravidade. Sua temperatura aumenta como deve ser: a energia gravitacional é convertida em calor. A camada externa de hidrogênio é queimada, pois muita energia térmica é liberada do núcleo.

Conforme isto acontece, as camadas externas expandem e esfriam. Um fluxo muito forte de radiação e pressão dispersa essas camadas de matéria e o volume da estrela aumenta. A estrela se torna uma gigante vermelha. A estrela se torna vermelha pois o volume aumenta muitas vezes: as camadas externas sofrem uma grande expansão. Alguma perda de massa pode ocorrer

nesta fase, isto é, alguma fração das camadas exteriores de gás podem ser inteiramente varridas. Isto pode dar origem ao que se conhece por nebulosa planetŕia, em alguns casos. Espera-se que o nosso Sol se torne uma gigante vermelha nos próximos 5 bilhões de anos.

Mas, e o núcleo da estrela? O que acontece a ele? O centro é composto de hélio, mas devido à sua contração, sua densidade é muito alta. O peso, densidade e a temperatura são suficientes para disparar reações nucleares adicionais e o hélio pode ser convertido em carbono e oxigênio no centro.

Energia é liberada neste processo e a pressão é suficiente para suportar o tamanho deste núcleo (mas tal condição é temporária).

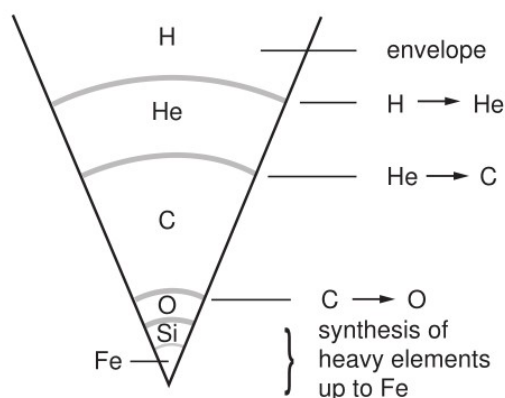



Figure 7.4: a estrutura do remanescente estelar em camadas

Note que a descrição acima é uma síntese muito breve: a evolução detalhada das estrelas é muito complexa e a trajetória evolucionária de algumas delas pode dar origem a algumas surpresas: ejeção de massa, ventos estelares, etc.

Em seguida, acompanhamos a evolução, no diagrama H-R de uma única estrela que deixou a sequência principal em algum ponto dela:

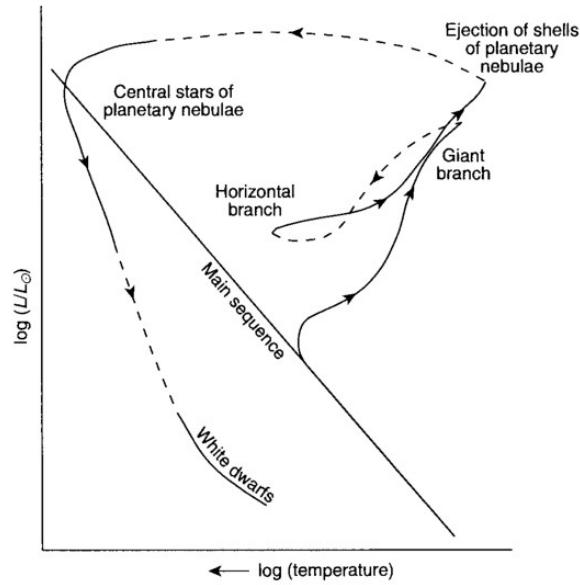



Figure 7.5: caminho de uma estrela que deixou a sequência principal em algum momento.

O diagrama acima se refere ao diagrama HR (Hertzprung-Russel) que plota a posição da estrela como função de sua luminosidade e temperatura.

7.1.9 Anãs Brancas

Os recursos de energia das estrelas são finitos e serão consumidos em algum momento no futuro. De acordo com o quadro acima, em algum momento, a estrela terá um núcleo muito quente, mas ainda assim incapaz de gerar reações nucleares, de modo a gerar um excesso de pressão no seu centro. O que ocorrerá em seguida? Uma estrela pode suportar o seu tamanho, contra o colapso gravitacional, de modo permanente?

De acordo com o que vimos na seção prévia, estrelas são compostas de hidrogênio, hélio e outros elementos criados pelas reações nucleares. A temperatura no núcleo estelar é grande o suficiente tal que o gás esteja no estado de plasma. Do ponto de vista da termodinâmica, ainda podemos tratá-lo como gás ideal:

$$P = nk_bT \tag{7.24}$$

onde: $k_B = 1.38 \times 10^{-23} JK^{-1}$ é a constante de Boltzmann.

A equação acima mostra que o auto-suporte não é mais possível agora. Necessita-se de mais energia térmica, para obtermos a pressão suficiente contra a contração, em uma dada densidade. Visto que as estrelas perdem

energia, para o espaço, através da superfície, elas não podem sustentar o seu equilíbrio, e para ganhar pressão elas precisam de uma fonte externa de energia. Mas, esta fonte externa de energia não está à disposição.

Agora, nesta fase, temos um núcleo muito denso e quente, mas a temperatura e a densidade não favorecem a continuação de reações nucleares, logo, o excesso de pressão térmica do núcleo, desaparece subitamente. Como consequência, o núcleo desaba sobre si mesmo, aumentando violentamente a sua densidade.

O núcleo agora é muito denso, e os elétrons, como se sabe, obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli: dois elétrons não ocupam o mesmo estado quântico ao mesmo tempo. Como consequência, uma nova e inesperada fonte de pressão aparece: a pressão de degenerescência dos elétrons. Esta pressão é suficiente para deter a contração do núcleo. Os cálculos teóricos mostram que a pressão devido aos elétrons é determinada pela densidade numérica dos mesmos:

$$P \propto n^{\Gamma} \tag{7.25}$$

Com $\Gamma = 5/3$ ou $\Gamma = 4/3$ dependendo do regime: baixas densidades ou altas, respectivamente. O importante aqui é ter em mente que a pressão de elétrons degenerados não é de origem térmica e continua mesmo que as reações nucleares cessem por completo.

Deste modo, o caroço feito de carbono, oxigênio, hélio, etc pode ser suportado contra a contração garvitacional e ele estabiliza o seu tamanho. Este caroço é muito quente ainda, pois a temperatura não cai de imediato, uma vez que as reações cessam. O calor residual radia lentamente para o espaço, a uma taxa extremamente lenta, de milhões de anos.

A próxima questão é: quanta pressão é necessária para deter o colapso do núcleo? A equação de equilíbrio hidrostático fornece a resposta:

$$\left(\frac{dP}{dr}\right) = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \tag{7.26}$$

Aqui: $m(r)$ é a massa encerrada por uma camada esférica de raio r e $\rho(r)$ é a densidade local no raio r. O lado esquerdo é o gradiente de pressão. Se nós resolvermos esta equação com as condições de contorno: $P(R) = 0$, $m(R) = M$ e $P(0) = P_c$ obtemos para a pressão central:

$$P_c \sim GM^{2/3}{\rho_c}^{4/3} \tag{7.27}$$

Como se espera, a pressão central depende da massa total e aumenta conforme a massa é maior, e depende da densidade também. Se a pressão dos

elétrons degenerados é maior do que a pressão central acima, nós concluímos que este efeito pode estabilizar o tamanho da estrela.

Lembre-se de que a densidade de massa é: $\rho(r) = mn(r)$, isto é, a densidade local é o produto da massa pela densidade numérica. Para deduzir tal expressão, transforme a eq.(7.26) de equilíbrio hidrostático na forma:

$$-\frac{P_c}{R} \sim -\frac{GM\rho}{R^2}$$

e substitua a relação: $\rho \propto M/R^3$, com um pouco de álgebra chega-se à eq.(7.27) facilmente.

Se o gás de elétrons degenerados tem pressão suficiente para estabilizar o tamanho da estrela, deve ser maior do que o valor acima, logo, deve-se exigir: $P_e > P_c$, vamos calcular P_e agora.

Cálculo da pressão dos elétrons degenerados: P_e

Agora, vamos deduzir as fórmulas a partir de primeiros princípios e iremos extrair um limite superior à massa das anãs-brancas a partir dessas considerações. O número de estados ocupados por elétrons em um volume do espaço de fase é: $\frac{2Vd^3p}{h^3}$. O número total de elétrons é:

$$N_e = \int_0^{p_F} \frac{2Vd^3p}{h^3} \tag{7.28}$$

Dividindo-se por V obtém-se:

$$n_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \tag{7.29}$$

Portanto, a pressão será dada por:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{p_F} v(p)p\frac{2}{h^3}4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_F} v(p)p^2 dp \tag{7.30}$$

Usa-se agora:

$$v(p) = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} \tag{7.31}$$

Então, a expressão geral é:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^4c^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} dp \tag{7.32}$$

Considerando os regimes: $p >> mc$ ou o oposto: $p << mc$, obtém-se finalmente (visto que: $p_F \propto n_e^{1/3}$):

$$P = \begin{cases} K_r n_e^{4/3} \text{ (relativístico)} \\ K_{nr} n_e^{5/3} \text{ (não-relativístico)} \end{cases} \tag{7.33}$$

onde: $K_{nr} = \frac{h^2}{5m_e}\left[\frac{3}{8\pi}\right]^{2/3}$ e $K_2 = \frac{hc}{4}\left[\frac{3}{8\pi}\right]^{1/3}$.

Agora, lembre-se que a densidade numérica de elétrons depende do material nuclear (podemos ter 1, 2 ou mais elétrons por núcleon) como:

$$n_e = Y_e \frac{\rho_c}{m_H} \tag{7.34}$$

Onde: Y_e é o número de elétrons/núcleon, m_H é a massa do próton e ρ_c é a densidade central.

Desta forma, a pressão dos elétrons não-relativístico é:

$$P_e = K_{nr}\left(\frac{Y_e \rho_c}{m_H}\right)^{5/3} \tag{7.35}$$

Se $P_e \sim P_c$ a densidade central é da ordem de:

$$\rho_c \sim \frac{3.1}{Y_e^5}\left(\frac{M}{1.85 M_\odot}\right)^2 \frac{m_H}{\lambda^3} \tag{7.36}$$

onde: $\lambda = \frac{h}{m_e c}$ é o comprimento de onda Compton do elétron.

Naturalmente, se o centro tiver uma grande densidade, muito maior do que este, os elétrons estarão no regime relativístico, ou seja, quando: $n_e >> \lambda^{-3}$.

Neste caso, a estrela será suportada pela pressão dos elétrons degenerados se e somente se:

$$P_e > P_c \rightarrow K_r \left[\frac{Y_e \rho_c}{m_H}\right]^{4/3} \geq G M^{2/3} {\rho_c}^{4/3} \tag{7.37}$$

Naturalmente, a densidade cancela de ambos os lados e obtemos um limite superior para a massa da Anã Branca:

$$M \leq 4.3 Y_e^2 M_\odot \sim 1.46 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot \tag{7.38}$$

cujo limite é conhecido como: **limite de Chandrasekhar.**

Relação Massa-Raio:

Para deduzir um limite superior, devemos estudar a equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{7.39}$$

Usando a mudança de variável: $P = K\rho^{(1+1/n)}$, $\rho = \rho_c\theta^n$ e $r = a\xi$, pode-se transformar a eq.(7.35) em:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{7.40}$$

esta equação diferencial é conhecida como **equação de Lane-Emden.**

Agora, as condições de contorno são: $\theta(0) = 1$ e $\theta'(0) = 0$. Usando: $R = a\xi_1$ obtém-se: $R \propto {\rho_c}^{(1-n)/2n}$. E a massa será:

$$M = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr = 4\pi a^3\rho_c\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^n d\xi \tag{7.41}$$

Portanto, obtém-se:

$$M \propto \rho_c\left(\rho_c^{3(1-n)/2n}\right) \tag{7.42}$$

Para algumas escolhas de n obtêm-se dependências interessantes, para $n = 3/2$, temos:

$$R \propto M^{-1/3} \tag{7.43}$$

mas, esta relação vale apenas no domínio não-relativístico da matéria. Agora, precisamos analisar a equação de estado relativística para $n = 3$ a partir da qual $P \propto \rho^{4/3}$. Para $n = 3$ a massa se torna independente de ρ_c. Agora, integrando-se de $\xi = 0$ a ξ_1, obtém-se:

$$\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^n d\xi = -{\xi_1}^2\frac{d\theta}{d\xi}(\xi_1) \tag{7.44}$$

A integral pode ser trocada por , onde o indíce $'$ denota a diferenciação com relação a ξ.

Adicionalmente, troca-se a expressão a como dada pela eq.(5.18) na eq.(5.23) e colocamos a expressão eq.(5.12) no lugar K. Este procedimento fornece:

$$M_{ch} = \frac{\sqrt{6}}{32\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2\frac{\xi_1^2\theta'(\xi)}{m_H} \tag{7.45}$$

Numericamente obtém-se:

$$M_{ch} = 1.46\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot \tag{7.46}$$

Este valor é o limite superior à massa de uma anã-branca: objetos compactos acima deste valor devem se transformar em outro tipo de objeto: uma estrela de nêutrons, muito mais compacto e suportado pela pressão dos nêutrons degenerados.

Por que existe este limite? A densidade da Anã Branca aumenta conforme a sua massa aumenta (e o seu raio diminui).

Se a massa da Anã Branca estiver muito próxima do limite superior e alguma massa lhe for adicionada, ela irá superar o limite, e neste momento, um processo envolvendo os elétrons e prótons toma lugar: os elétrons combinam com os prótons: formando nêutrons e neutrinos. Nesta reação, a pressão dos elétrons degenerados cai subitamente e este núcleo desaba novamente, sob o seu peso, e para somente quando uma nova fonte de pressão aparece: a pressão dos nêutrons degenerados. Conforme iremos ver, a compactação deste objeto, se comparado a uma Anã Branca é algo fantástico: obtemos agora um objeto com a massa do Sol (perto disto), mas com raio da ordem de 10 a 20km! Na prática, algumas estrela com massa $M > 1.44M_{\odot}$ podem lançar alguma massa para o espaço, e o seu núcleo ainda estará abaixo do limite de Chandrasekhar. Mas, se este não for o caso, o destino como uma Estrela de Nêutrons é inevitável!

Para encerrar esta seção, enfatiza-se uma característica notável das Anãs Brancas: conforme a massa da Anã Branca aumenta, o seu raio encolhe (desde que $M < 1.44M_{\odot}$).

A relação entre massa e raio é: $R \propto M^{-n}$, com $n \sim 1/3$. A figura a seguir mostra mostra a dependência qualitativa entre massa e raio:

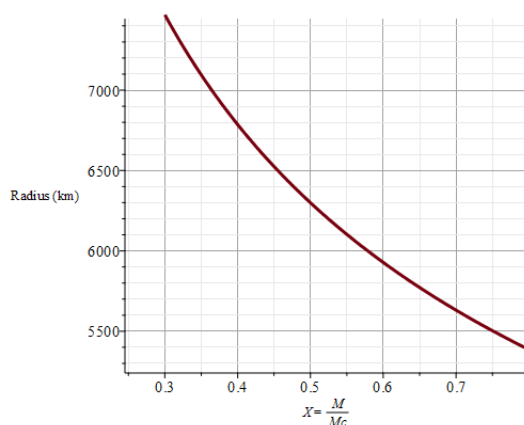



Figure 7.6: o raio de uma Anã Branca como função da massa

Um raio típico é da ordem de $R \sim 5000km$, em outras palavras, um tamanho comparável à Terra.

A razão de compactação é: $(r_g/r) \sim 10^{-4}$ e esta raão justifica a equação de equilíbrio hidrostático Newtoniano.

Conforme pode ser verificado , esta razão não é obedecida para Estrelas de Nêutrons, as quais são muito mais compactas do que as Anãs. Desta forma, a equação de equilíbrio para estrelas muito compactas irá exigir as correções da Relatividade Geral.

7.1.10 Supernovas

Agora, vamos descrever a evolução de estrelas com massas maiores do que $1.44 M_{\odot}$, o limite de massa de Chandrasekhar.

Em algum momento, um ncleo de hélio é formado no centro da estrela, denso e quente para que as reações nucleares queimem o hélio no carbono e no oxigênio. Agora, o carbono e o oxigênio ocupam a parcela a mais central do núcleo com o hélio que os cerca (o carbono e o oxigênio são mais pesados do que o helium). Mas, este núcleo continua a se contrair e se aquece, tornando-se mais denso. A temperatura e a densidade são suficientes para fundir o carbono no neônio e nos outros núcleos.

Este padrão continua a se repetir, e em cada caso, as reações nucleares providenciam energia térmica para fundir núcleos mais pesados e pressão para suportar o peso da estrela. A contração do núcleo continua mas em uma taxa mais lenta neste caso. A configuração do núcleo é: um caroço gasoso de ferro e níquel, circundado por camadas sucessivas de elementos mais leves. O envelope mais externo ainda é de hidrogênio.

Em algum momento, a densidade da porção mais central do núcleo (ferro e níquel) apoia-se pela pressão de elétrons degenerados até que a sua massa fique demasiado grande, algumas massas solares. As reações nucleares além do ferro não geram o calor e a pressão porque deste ponto os núcleos absorvem a energia (endotérmicas reações).

Lembre-se de que o ferro e o níquel são os núcleos mais estáveis, a energia de ligação está no mínimo. Quando a massa de ferro e níquel é substancial, a P_c cai e o núcleo sofre colapso gravitacional. Como ele se contrai, a energia de ligação (gravitacional e nuclear) converte-se em calor e as temperaturas centrais se elevam enormemente.

A foto-desintegração toma lugar: fótons de alta energia quebram os núcleos em nêutrons e prótons.

Quando a densidade da matéria alcança 200 bilhões de vezes a densidade da água, outro processo toma lugar: elétrons combinam com prótons para produzir nêutrons e neutrinos.

Uma grande fração de energia é transferida para os neutrinos. O núcleo da estrela continua a contrair até que a densidade alcançe $10^{14} gcm^{-3}$.

Nesta etapa, a pressão de nêutrons degenerados e as forças nucleares repulsivas são capazes de apoiar o peso da estrela. O colapso para em algum momento. Mas este evento provoca uma onda de choque que se propaga para fora. Esta onda de choque faz com que as camadas exteriores da estrela sejam expulsas. Acredita-se que isto forneça a explicação de supernovas: a explosão disruptiva de estrelas, várias das quais foram vistas em séculos passados. Os seguintes dados mostram várias fases em cima e a implosão do núcleo, liberando um estouro de neutrinos:

Como um exemplo, em Fevereiro de 1987, uma supernova foi observada na Grande Nuvem de Magalhães. Esta foi a primeira supernova observada em um estrela próxima, em mais de 300 anos. Este evento foi acompanhado de um surto de neutrinos (a direção do surto concorda com a contra-parte óptica do evento). Esta foi a primeira vez que neutrinos não solares foram observados em um evento astrofísico. A observação desta supernova foi a primeira confirmação de cálculos teóricos baseados em modelos estelares para o colapso.

A próxima figura mostra a Supernova 1987A tomada pelo Telescópio Espacial Hubble:

Figure 7.7: supernova 1987A

Como um resultado da nucleosíntese estelar, obtém-se a abundância dos elementos mais pesados (mais pesados do que o Hélio). De onde vieram: o carbono, oxigênio, etc? Todos esses elementos vieram de reações nucleares em estrelas e foram dispersos através do espaço nas explosões de supernovas.

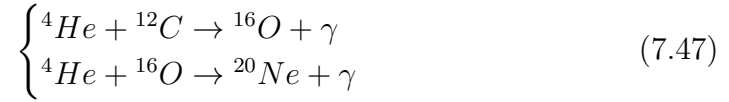
7.1.11 O colapso do núcleo

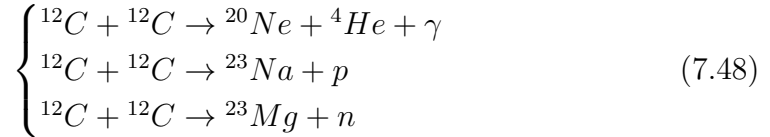
As estrelas com massas maiores do que $8M_\odot$ são excelentes candidatas para gerarem o próximo tipo de objeto compacto: Estrela de Nêutrons. O que ocorre nelas?

1) Após o consumo do hidrogêncio nos seus núcleos, tais estrelas se movem para o ramo das gigantes (no diagrama HR). O forte aquecimento do núcleo expande as camadas mais externas da estrela, aumentando o seu brilho e lhes conferindo um tom avermelhado.

2) A partir daí elas começam uma sequência de passos, cada uma consitindo da contração e aquecimento das regiões mais internas, resultando na ignição de novas reações nucleares. Conforme o tempo passa, camadas de diversos raios internos atingem temperaturas e densidades exigidas na produção de núcleos mais pesados.

3) As estrelas de mais baixa massa podiam queimar o hélio, formando carbono, oxigênio e neônio:

$$\begin{cases} ^4He + {}^{12}C \rightarrow {}^{16}O + \gamma \\ ^4He + {}^{16}O \rightarrow {}^{20}Ne + \gamma \end{cases} \tag{7.47}$$

Mas, as mais massivas podem queimar o carbono via as reações:

$$\begin{cases} ^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{20}Ne + {}^4He + \gamma \\ ^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{23}Na + p \\ ^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{23}Mg + n \end{cases} \tag{7.48}$$

A queima do carbono é seguida pelo neônio, oxigênio e silício, sendo que cada um desses estágios leva menos e menos tempo. Para citar um exemplo, tome o caso de uma estrela de $25M_\odot$, a duração de cada estágio é:

$$\begin{cases} H \sim 5 \times 10^6 \text{ anos} \\ He \sim 5 \times 10^5 \text{ anos} \\ C \sim 500 \text{ anos} \\ Ne \sim 1 \text{ ano} \\ Si \sim 1 \text{ dia} \end{cases} \tag{7.49}$$

A figura seguinte mostra a estrutura da estrela como um todo e um zoom do núcleo da mesma.

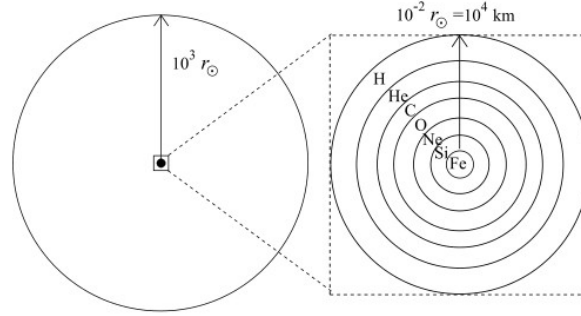
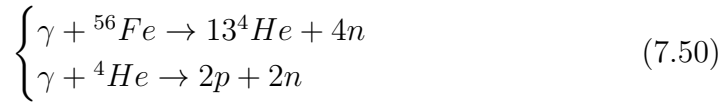



Figure 7.8: estrutura em camadas de elementos mais pesados

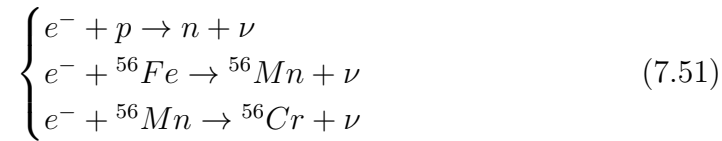
Quando o caroço, de ferro continua a crescer e se aproxima da massa limite, de Chandrasekhar, dois processos se iniciam:

1) Fotodesintegração nuclear:

A temperatura é alta o suficiente para fótons energéticos serem abundantes e eles se veem absorvidos pelas reações nucleares endotérmicas (consomem calor):

$$\begin{cases} \gamma + {}^{56}Fe \rightarrow 13{}^{4}He + 4n \\ \gamma + {}^{4}He \rightarrow 2p + 2n \end{cases} \tag{7.50}$$

A primeira reação consome $124MeV$ em energia e a segunda $28.3MeV$. Logo, a energia/núcleon, consumida no processo é: $8.8MeV$. Entretanto, o caroço deve ter por volta de 10^{57} nucleons ao todo, de modo quea energia total consumida é por volta de: $1.4 \times 10^{52} ergs$, muito mais energia que o Sol liberou em todo a sua fase na sequência principal.

2) Neutronização:

$$\begin{cases} e^- + p \rightarrow n + \nu \\ e^- + {}^{56}Fe \rightarrow {}^{56}Mn + \nu \\ e^- + {}^{56}Mn \rightarrow {}^{56}Cr + \nu \end{cases} \tag{7.51}$$

Esta reação consome os elétrons, e portanto, a sua contribuição à pressão cai rapidamente, e se estabelece em um valor muito baixo, pois a densidade dos elétrons neste momento se torna $n_e \sim \frac{n_n}{200}$, o que implica que a pressão que eles exercem cai subitamente. Com a queda desta pressão, o núcleo deve desabar sob o seu peso, contraindo-se e gerando o novo objeto compacto de nosso estudo: uma Estrela de Nêutrons.

A escala de tempo típica para o colapso é função da densidade da matéria do objeto, ou seja, dada por:

$$\tau_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho}\right)^{1/2} \sim 0.1s \tag{7.52}$$

considerando-se que o tempo acima foi estimado usando a densidade: $\rho \sim 10^9 gcm^{-3}$.

Conforme o colapso prossegue, e a densidade e temperatura se elevam, a reação:

$$e^- + p^+ \rightarrow n + \nu_e \tag{7.53}$$

se torna comum, e o processo inverso: $n + \nu_e \rightarrow e^- + p^+$ torna-se cada vez menos frequente. Desta forma, a maioria dos núcleons se tornam nêutrons, e o equilíbrio ocorre quando $n_e \sim \frac{n_n}{200}$. A pressão dos elétrons degenerados cai a valores desprezíveis e a pressão térmica residual é ainda muito menor, desta forma, apenas a pressão dos nêutrons degenerados suporta o novo e extremamente compacto tamanho deste objeto.

7.1.12 Estrelas de Nêutrons

Agora, neste estágio, nós somos deixados com um núcleo extremamente massivo (mais que $1.44M_\odot$) feito de nêutrons, a uma estupenda densidade, da ordem da densidade do núcleo atômico. A força repulsiva originada da pressão dos nêutrons degenerados é suficiente para estabilizar o núcleo em um tamanho fixo (cujo tamanho diminui conforme a massa aumenta):

$$R \sim 14\left(\frac{M}{1.4M_\odot}\right)^{-1/3} \text{km} \tag{7.54}$$

Entretanto, diferentemente do que ocorria com a análise das anãs brancas, a imensa compactação deste objeto não permite usarmos a equação de equilíbrio hidrostático na aproximação Newtoniana. O objeto agora é extremamente compacto (poucos km de raio) e pesado, curvando fortemente o espaço-tempo ao seu redor. A correta equação de equilíbrio hidrostático para descrever uma Estrela de Nêutrons, é:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho(r) + P(r))(m(r) + 4\pi r^3 P(r))}{r(r - 2m(r))} \tag{7.55}$$

Vamos interpretá-la antes de resolvê-la. Observe que a pressão, desta vez, gera campo gravitacional, ela entra somando com a densidade de matéria ρ e entra somando com a massa contida em r: $m(r) \rightarrow m(r) + 4\pi r^3 P(r))$. Então, é muito mais difícil manter o equilíbrio na Relatividade Geral do que no caso Newtoniano (para uma mesma massa).

O objeto que foi formado, é composto quase que inteiramente de nêutrons (pode existir uma equação de estado exótica, na sua região mais central) a uma densidade extremamente elevada. Nós denominamos tal objeto de **estrela de nêutrons**.

Uma estrela de nêutrons é um objeto muito pequeno ($\sim 15km$), limitado pela interação gravitacional em equilíbrio com a pressão dos nêutrons degenerados (de modo parecido com as anãs-brancas). Mas há algumas diferenças importantes: elas possuem um campo magnético extremamente elevado e uma grande taxa de rotação Ω, e um feixe de radiação que acompanha esta rotação.

Este feixe, ao que parece, deve estar ligado a toda estrela de nêutrons, mais isto ainda é discutível. Por sua vez, o feixe de radiação, uma espécie de farol, é muito importante pois lhe confere um forte atributo observacional. O feixe de radiação varre o céu na mesma taxa de rotação do objeto, logo, um observador que cruze este feixe poderá observar o fenômeno. Tal aspecto observacional de um estrela de nêutrons leva o nome de pulsar (a radiação é na maioria das vezes na faixa do rádio).

Como consequência da radiação gerada pelo pulsar, a estrela de nêutrons que lhe está associada perde momento angular, de modo contínuo, esta perda é descrita por:

$$\frac{dE}{dt} = -\omega^4 \tag{7.56}$$

Do mesmo modo que as Anãs Brancas, Estrelas de Nêutrons têm um limite superior para a sua massa, mas a origem física deste limite superior é ligeiramente diferente. Devido às incertezas sobre o conhecimento da matéria a grandes densidades, o valor deste limite superior não é tão exato como no caso das Anãs Brancas. O valor deste limite superior é algo que se situa entre 3 a 5 massas solares: $[3, 5]M_\odot$, mas um valor mais conservador parece ser por volta de $M_{max} \sim 3.6M_\odot$. Logo, o intervalo em que podemos encontrar Estrelas de Nêutrons é: $[1.44, 5.0]M_\odot$.

Conforme iremos ver, a natureza do limite superior para o caso das estrelas de nêutrons é baseada na divergência da pressão central P_c quando a massa se aproxima do limite superior e do fato de que a imensa pressão é agora fonte de gravidade e portanto, não mais sustenta o equilíbrio radial das camadas de matéria que compõem o objeto. Como resultado de muita análise, um objeto com massa superior ao limite acima, deve entrar em instabilidade gravitacional entrando em colapso e formando em seguida um objeto ainda mais compacto: um buraco negro. Este objeto some de vista dos observadores externos em frações de segundo.

Voltando às Estrelas de Nêutrons: a existência delas foi confirmada pela

descoberta dos **pulsares** em 1967. Um pulsar, como já foi descrito resumidamente acima, é uma fonte que emite radiação eletromagnética a intervalos extremamente regulares: de milésimos de segundo a diversos segundos.

A regularidade dos períodos dos pulsares é explicada se assumirmos que um pulsar se origina de uma Estrela de Nêutrons em rápida rotação. Um pulso de radiação de um pulsar é avistado na Terra toda vez que o mesmo atinge a nossa direção (é um feixe de radiação colimado, ou seja, com uma abertura angular não muito larga). A imensa taxa de rotação de um pulsar implica que o objeto compacto que lhe é associado deve ser muito mais compacto do que uma anã-branca: algo em torno de 10 a 20km. Em caso contrário, um objeto do tamanho de uma anã-branca com tal taxa de rotação deveria se fragmentar devido à centrífuga.

Deste modo, uma classe particular de eventos de supernova pode dar origem a um evento explosivo e brilhante, mas deixando para trás um resíduo, um remanescente, quase esfríco e extremamente compacto, com boa parte da massa original da estrela: uma estrela de nêutrons. No processo, muita massa, na explosão, pode ter sido perdida para o espaço, mas na maioria das vezes, um caroço muito massivo ainda sobrou, tendo grande rotação e campo magnético e piscando a intervalos regulares devido à sua rotação. Note-se no entanto, que o eixo de rotação de um pulsar e o eixo do hot-spot que gera o pulso de radiação, não estão necessariamente alinhados. A nebulosa do Caranguejo tem a mais famosa estrela de nêutrons associada a um pulsar. Ela roda muito rapidamente, enviando radiação na forma de um feixe colimado. O mecanismo exato pro trás da geração deste feixe não é totalmente conhecido.

Evidentemente, como explicamos, a existência de um limite superior à massa de uma estrela de nêutrons implica a existência de um objeto ainda mais exótico: um Buraco Negro.

Note que diferentes estrelas têm diferentes destinos: algumas estrelas terminam como Anãs Brancas e as mais massivas como Estrelas de Nêutrons ou Buracos Negros.

O limite superior à massa de uma Estrela de Nêutrons, em termos da densidade é:

$$M < \frac{3.6 M_{\odot}}{\sqrt{\rho/10^{15} gcm^{-3}}} \tag{7.57}$$

A análise executada para obter este resultado é semelhante ao que foi feito para as anãs-brancas, mas desta vez a pressão é providenciada pelos nêutrons, veja Camezinde e Teukolski para a demonstração.

Para confirmar que esses objetos não podem ser Anãs Brancas considere

que a força centrífuga satisfaz:

$$a_{cent} < g(r) \rightarrow \Omega^2 r < \frac{GM}{r^2} \tag{7.58}$$

Esta expressão leva a: $\Omega < \sqrt{G\rho}$.

Pulsares com período menor do que $T \sim 1s$ foram descobertos e este valor descarta as anãs-brancas pois exigiria que as mesmas tivessem: $\rho > 10^{11} gcm^{-3}$. Mas, como vimos, acima desta densidade ocorre a neutronização: elétrons se fundem com os prótons gerando nêutrons e neutrinos.

7.1.13 Resumo dos Objetos Compactos

Os objetos compactos diferem das estrelas normais nos aspectos:

1) Eles não queimam combustível nuclear (note no entanto que tais objetos ainda são tremendamente quentes, eles não liberam o seu calor residual de uma vez e a temperatura na superfície de uma anã ou uma Estrela de Nêutrons ainda é muito alta).

2) Eles não suportam o seu tamanho contra o colapso gravitacional por meio da radiação térmica ou pressão térmica, uma vez que as reações nucleares se encerraram.

3) As Anãs Brancas são suportadas pela pressão de elétrons degenerados e as estrelas de nêutrons são principalmente suportadas pela pressão dos nêutrons degenerados e quarks.

4) Eles são muito menores do que as estrelas comuns e portanto a sua gravidade superficial é muito maior. Uma Anã Branca tem tamanho da ordem de $5000km$ e uma Estrela de Nêutrons tipicamente $20km$.

5) Os objetos compactos apresentam fortíssimos campos magnéticos.

6) A massa máxima de uma Anã Branca é de $1.44M_\odot$, o valor exato depende de algum modo da equação de estado. Esses objetos ainda têm um grande calor residual que irradia lentamente para o espaço.

7) O limite superior à massa de uma Estrela de Nêutrons é $\sim 4M_\odot$, o valor exato é mais incerto do que para as Anãs, e alguns autores o colocam próximo de $3M_\odot$. Em qualquer caso, estamos muito seguros de que Estrelas de Nêutrons com massa maior do que $M > 4M_\odot$ irão desabar sob o seu próprio peso, entrando em colapso gravitacional e formando um Buraco Negro.

7.2 A evidência observacional dos Buracos Negros

7.2.1 Sistemas binários

Estrelas aparecem em pares, sistemas múltiplos, etc. Estrelas isoladas como o nosso Sol parecem a exeção, compondo cerca de 1/3 das estrelas na nossa galáxia. Naturalmente, é muito difícil que um dos membros de um binário (duas estrelas) tenha a massa muito semelhante a do companheiro, de modo que um deles (o mais massivo) sai primeiro da sequência principal, pois sua taxa de evolução é maior. Este membro do binário pode formar uma Anã Branca, uma Estrela de Nêutrons ou um Buraco Negro. Vamos considerar este último, como companheiro.

Se este companheiro massivo for um Buraco Negro, ele irá se tornará invisível, e se não houver fluxo de gás vindo da companheira visível, só poderemos inferir a sua existência estudando a trajetória oscilante da que é visível. Aplicando-se as leis de Kepler e considerando-se possíveis efeitos da linha de visada (inclinação do plano da órbita) podemos deduzir o intervalo da massa dos dois elementos. Mas, na maioria das vezes, a companheira visível irá transferir uma porção da sua tênue atmosfera, para o companheiro compacto, na forma de um fluxo de gás.

A componente visível preenche o seu **lobo de Roche**, e um fluxo de gás pode cair sobre o Buraco Negro: a companheira invisível do binário.

O **lobo de Roche** é uma superfície imaginária que permite um fluxo de gás de uma componente do sistema para o outro. A forma do lobo de Roche é determinada pela gravidade do sistema e sua dinâmica: proximidade, massa dos objetos, etc. Uma forte analogia seria dizer que o lobo de Roche é um tipo de equipotencial gravitacional.

Qualquer material dentro do lobo de Roche de uma estrela deve ser considerado parte dela. Durante a sua evolução, um membro pode expandir a sua atmosfera e ela pode preencher o lobo de Roche. Quando isto ocorre, a estrela passa a transferir matéria para a componente que é compacta (mas é mais pesada). Este fluxo de gás forma um disco, espiralando em torno do Buraco Negro. O formato é em disco devido à conservação do momento angular. Este disco leva o nome de **disco de acréscimo** (ou **disco de acresção**).

O fluxo laminar sobre o Buraco Negro é hidrodinamicamente instável, tornando o disco turbulento, e a turbulência eleva a temperatura do gás a milhões de graus. A fricção e turbulência reduz o momento angular do gás, e com isto o gás vai caindo continuamente no Buraco Negro. Uma vez que o horizonte de eventos não é uma superfície dura, o gás em queda entra no

Buraco Negro e aumenta a sua massa.

A porção mais interna do disco deve ser uma forte fonte de raios-X. Podemos aplicar a **lei de Wien** para estimar a temperatura:

$$T = \left(\frac{0.029}{\lambda_{max}}\right) cmK \tag{7.59}$$

visto que: $\lambda_{max} \sim 3 \times 10^{-10} m$ obtém-se: $T \sim 10^7$ Kelvin!

A luminosidade observada em raios-X varia de 10^{26} a 10^{31} Watts. Para produzir uma luminosidade de 10^{30} Watts, em $T \sim 10^7$ Kelvin, um objeto que irradia como um corpo negro deve ter um raio de:

$$R \sim \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} \tag{7.60}$$

usando-se a lei de Stefan-Boltzmann. Inserindo os valores acima, obtém-se:

$$R \sim 10km \tag{7.61}$$

e, este é o raio do disco, o objeto compacto deve ser ainda menor que isto. Em alguns casos, os astrônomos usam a Terceira Lei de Kepler, e eles analisam a massa combinada através de:

$$(m_1 + m_2) P^2 = a^3 \tag{7.62}$$

A partir dos dados astronômicos podemos extrair P e a, e a massa da companheira visível m_2 é extraída da análise do tipo espectral e sua massa (tabela padrão). Então, obtém-se o combinado $(m_1 + m_2)$, onde m_2 é medido.

Se m_1 é maior que o limite superior para uma estrela de nêutrons, então a companheira invisível deve ser um Buraco Negro. Alguns exemplos são: Cygnus X-1 (Cisne X-1) tem uma companheira invisível de $6M_\odot$, LMC X-3 tem uma companheira invisível com $10M_\odot$, portanto, seguramente, esses objetos são Buracos Negros.

Algumas incertezas nos valores medidos surgem devido à inclinação do plano orbital com relação à linha de visada.

Entretanto, isto estabelece as massas dentro de um intervalo, cujo limite inferior ainda é muito superior ao limite superior da massa das Estrelas de Nêutrons, e desta forma, a conclusão permanece a mesma.

Para finalizar esta seção, note que o efeito Doppler pode alterar o padrão do disco que circunda o Buraco Negro (lembre-se que gás rotaciona em torno dele).

Próximo do horizonte, o redshift gravitacional é dominante: $D < 1$. No flanco esquerdo, a emissão é azulada devido ao efeito Doppler, $D > 1$. A

linha branca denota as posições no disco onde a emissão não é deslocada, para o azul ou vermelho, $D = 1$. A figura acima mostra a distribuição do redshift para um disco geometricamente fino.

7.2.2 Ondas gravitacionais e a colisão de Buracos Negros

Na Eletrodinâmica, cargas aceleradas e dipolos radiam: existe um fluxo de energia (ligado às variações espacial e temporal nos campos) que atravessam o espaço. De acordo com os nossos estudos, sabemos que as ondas eletromagnéticas viajam à velocidade da luz.

Uma situação muito semelhante ocorre na Relatividade Geral, mas com algumas diferenças.

Na Eletrodinâmica, a fonte dos campos é um vetor e na gravidade, a fonte da curvatura é um tensor de ordem 2. Como consequência, devemos ter uma expansão multipolar com ordem maior do que 2, para se obter uma onda, de modo análogo ao que foi feito na Eletrodinâmica.

A conclusão geral é: o campo gravitacional, sob certas circunstâncias, pode irradiar. Nesta seção, iremos apresentar as equações sem a sua dedução. Referimos o leitor a H.Ohanian [20] para os detalhes sobre a dedução da equação de onda.

Ondas são descritas por equações de onda e têm a forma matemática dada por:

$$\partial_a \partial^a A^b = -kJ^b(t, \vec{x}) \tag{7.63}$$

onde A^b é o campo (a onda em si) e J^b é uma corrente. Mas, sabe-se que a gravidade é descrita por um tensor de segunda ordem: g_{ab}, logo, esperamos que a equação de onda seja algo como:

$$\partial_c \partial^c \Phi^{ab}(t, \vec{x}) = -kT^{ab}(t, \vec{x}) \tag{7.64}$$

Esta equação é obtida das equações de Einstein ao quebrarmos a métrica em duas partes:

$$g_{ab}(t, \vec{x}) = \eta_{ab} + \Phi_{ab}(t, \vec{x}) \text{ com: } |\Phi_{ab}| << 1 \tag{7.65}$$

Desta forma, interpretamos uma onda gravitacional como um pequeno distúrbio na métrica do espaço-tempo, e que se propaga no mesmo.

Além disso, ondas gravitacionais se propagam obedecendo ao vículo estrito da causalidade relativística, imposta pela velocidade da luz. Logo, elas devem ter soluções em forma retardada:

$$\Phi^{ab}(t,\vec{x}) = -\frac{k}{4\pi}\int d^3x' \frac{T^{ab}(t-|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{7.66}$$

Devido ao nosso escopo e espaço, não iremos deduzir todas as fórmulas aqui, mas pode-se mostrar que a onda pode ser colocada na forma:

$$\Phi^{ab}(t,\vec{x}) = -\frac{k}{24\pi r}\ddot{Q}^{ab}(t,\vec{x}) \tag{7.67}$$

onde:

$$Q^{ab}(t,\vec{x}) = \int d^3x' \left(3x'^a x'^b - r'^2 \delta^a{}_b\right) \tag{7.68}$$

é denominado **tensor de quadrupolo de massa-energia**.

O **fluxo de energia** é dependente da primeira derivada temporal de Φ^{ab} acima, mas uma vez que ela depende da segunda derivada do quadrupolo, o resultado é:

$$< P_{gw} >= \frac{dE}{dt} = -\frac{G}{45c^5}\dddot{Q}^{kl}\dddot{Q}^{kl} \tag{7.69}$$

Em princípio, a geração de ondas gravitacionais é muito simples: tudo o que é necessário é um quadrupolo variável no tempo, com terceira derivada não-nula. Um simples exemplo consiste em duas massas ligadas por uma mola. Se aplicarmos a fórmula acima para um sistema de duas massas conectadas por uma mola, obteremos:

$$< P_{gw} >= \frac{M^2L^2x_0^2\omega^6}{15P_0} \tag{7.70}$$

O fluxo em ondas gravitacionais deve ser dependente das constantes fundamentais tais como: c e G. A quantidade:

$$P_0 = \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{52} Js^{-1} \tag{7.71}$$

entra nas fórmulas que descrevem ondas gravitacionais.

A presença de P_0 no denominador mostra que somente eventos muito poderosos podem ser responsáveis para uma possível detecção de um fluxo apreciável (mensurável em princípio):

Outro sistema que poderia ser montado em laboratório é uma barra em rotação. O output em ondas é:

$$< P_{gw} >= \frac{2M^2L^4\omega^6}{45P_0} \tag{7.72}$$

Se $M = 100000$ toneladas e $\omega = 1Hz$ ela deveria gerar: $P \sim 10^{-24} Js^{-1}$. Claramente, é impossível gerar uma saída apreciável em ondas gravitacionais em um laboratório. Então, nós devemos buscá-las no espaço (ou provenientes dele).

Dando prosseguimento ao nosso estudo, ao realizarmos uma simples manipulação algébrica da fórmula acima, permite-nos escrevê-la em termos da velocidade de rotação v da extremidade da barra:

$$< P_{gw} >= \frac{128}{45} \frac{(M/L)^2 v^6}{P_0} \tag{7.73}$$

e, podemos reescrevê-la na forma mais sugestiva:

$$< P_{gw} >= \frac{32 P_0}{45} (r_g/L)^2 (v/c)^6 \tag{7.74}$$

onde inserimos: $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ e $\omega = \left(\frac{v}{L}\right)$ na equação acima.

Agora é fácil obter grandes valores em ondas gravitacionais a partir de eventos astrofísicos, uma vez que nesses eventos os parâmetros são da ordem da unidade. Nós devemos procurar por eventos em regiões compactas $r \sim r_g$, e envolvendo velocidades relativísticas. Mas, tais condições são típicas das fusões dos objetos compactos (Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros, ou uma combinação deles).

A teoria mostra que duas estrelas orbitando em torno do seu centro de massa comum irá emitir um fluxo de radiação garvitacional com: $\nu \sim T^{-1}$, onde T denota o período orbtal. Como uma consequência deste fluxo, a órbita muda com o tempo, reduzindo o seu período e o seu tamanho.

Exemplos típicos são: a Terra perde cerca de $\dot{E} \sim 10$ Watts em ondas gravitacionais e Júpiter perde $\dot{E} \sim 50$ Watts.

Podemos estimar o output em ondas gravitacionais a partir do colapso estelar? Claramente, este evento não pode ser esférico.

A saída em ondas gravitacionais apresenta um limite superior dado pela energia cinética (que convertida no colapso) dividida pela escala de tempo para o evento, da ordem de τ_{ff} (tempo de queda-livre ou free-fall).

Pelo Teorema do Virial, a energia cinética é metade da energia potencial e $\tau_{ff} \sim 2\pi R^{3/2}\sqrt{GM}$, usando-se a Terceira Lei de Kepler. Portanto, a fração é:

$$< P_{gw} >\sim \frac{GM^2/2R}{2\pi R^{3/2}\sqrt{GM}} \sim \frac{G^4}{c^5}\left(\frac{M}{R}\right)^5 \tag{7.75}$$

Para duas estrelas com massas M e órbita com distância R, a exata fórmula de quadrupolo fornece:

$$< P_{gw} >= \frac{64}{5} \frac{G^4}{c^5} \left(\frac{M}{R} \right)^5 \tag{7.76}$$

O mecanismo de perda orbital por ondas gravitacionais pode ser responsável pela fusão de Buracos Negros em diversas situações: sistemas binários, o núcleo da galáxia, etc. Em princípio conjectura-se que a fusão de muitos buracos negros de pequena massa pode eventualmente formar um Buraco Negro supermassivo, no núcleo de uma galáxia. O paradigma atual da atividade da região mais central das galáxias envolve a existência de um (ou mais de um) Buraco Negro de enorme massa (milhões de massas solares), mas ainda não se sabe como buracos negros com massas tão grandes podem ter sido formados (colisão de Buracos Negros menores ou a formação direta?).

A fusão de dois Buracos Negros é um evento fantástico e gera um burst de ondas gravitacionais com energia comparável a 1% a 10% de $E = Mc^2$, a fração correta dependendo dos detalhes da dinâmica orbital. Atualmente, muitos grupos trabalham com simulações numéricas feitas em supercomputadores.

Grandes Buracos Negros com massas $M \geq 20 M_{\odot}$, podem ser prolíficas fontes de energia em ondas gravitacionais e o experimento LIGO foi capaz de detectar alguns eventos envolvendo a fusão (ou colisão) de objetos compactos.

Descobertas recentes:

Em 2017, três experimentos detectaram ondas gravitacionais. Um deles é o LIGO nos USA, como mostra a figura abaixo:

Figure 7.9: LIGO

Este experimento é baseado no padrão de interferência de pulsos de LASER quando uma onda gravitacional atinge a localização do experimento. O padrão é registrado e tem um perfil diferente do perfil de interferência que

poderia surgir de um abalo sísmico, ou mesmo uma flutuação térmica. Note-se que nós estamos falando de pequenas oscilações muito menores do que o tamanho de um átomo, logo, para diferenciarmos tais flutuações de ruídos de outra natureza, exige-se um cuidado tecnológico muito detalhado e caro. Além disso, a confirmação ainda levou em conta a instalação de outro equipamento, distanciado cerca de ($\sim 3000km$), do primeiro. Desta forma, o LIGO consiste de dois equipamentos: um em Livingston e outro em Hanford.

A detecção do mesmo padrão de flutuações em equipamentos distanciados mais do que $2000km$ descarta a possibilidade de que o evento possa ser de origem local e terrestre (seja lá qual for a fonte de perturbação). A diferença em milisegundos da detecção de um evento para o outro confirma (dentro das incertezas experimentais) que a onda viaja à velocidade da luz.

Finalmente, ainda pode-se comparar o perfil medido da interferência com modelos teóricos, elaborados em supercomputadores, ajustando-se a todo momento as massas dos objetos em colisão. A comparação do formato do perfil modelado com os perfis registrados nas duas localizações diferentes confirma a previsão teórica da fusão de dois objetos compactos com massas muito maiores do que a do Sol.

A previsão do modelo se ajusta com os dados observados para um modelo 2-paramétrico: dois Buracos Negros com massas da ordem de $(20-30)M_\odot$, cujo evento ocorreu a centenas de milhões de anos-luz de distância. O evento na figura chama-se GW170814, ele é o quarto evento de fusão de Buracos Negros confirmado pela colaboração LIGO e Virgo (este último na Itália). Os Buracos Negros identificados têm massas similares aqueles do primeiro evento (GW150914) e o terceiro (GW170104). O segundo evento está associado à colisão de duas Estrelas de Nêutrons. Convidamos o leitor a visitar os sites: *www.ligo.org* e *www.virgo-gw.eu.* para acompanhar atualizações.

7.2.3 Gamma Ray Bursts: mortes estelares originando Buracos Negros?

Gamma Ray Bursts são surtos (breves flashes) de radiação de alta energia (principalmente na banda de raios gama) que aparecem (em média) uma vez ao dia. Esses eventos foram descobertos nos anos 60 por satélites que monitoravam atividade bélica no espaço. Desde a sua descoberta (acidental), diversos milhares de bursts foram descobertos, e hoje, temos diversos experimentos dedicados à sua detecção. O experimento BATSE, à bordo do Compton Gamma Ray Observatory tem sido capaz de detectar muitos eventos desde 1967. A distribuição dos GRBs no céu,é completamente uniforme, o que nos leva a suspeitar de que a sua origem é cosmológica (não são eventos

locais de nossa galáxia).

Mas, de onde eles vieram? Esta questão tem deixado intrigados os astrônomos por muitas décadas, com nenhuma solução aparente em vista.

Esses surtos de curta vida (segundos a minutos), principalmente em raios gama, permaneceram um dos maiores mistérios na astrofísica, por aproximadamente três décadas.

Durante este período, os burts eram conhecidos com uma precisão muito limitada, tornando o seu estudo muito difícil.

Desta forma, os cientistas não podiam determinar a distância aos GRBs, nem mesmo contando com uma estimativa grosseira. Seriam estes eventos de origem cosmológica (imensas distâncias) ou seriam eventos locais ao nosso sistema solar? Dado esta incerteza, os modelos teóricos que os descreviam eram muito divergentes entre si.

Em 8 de maio de 1997, o satélite BeppoSAX detectou um GRB, e os pesquisadores: Dale Frail da NRAO e Shri Kulkarni do Caltech, descobriram rádio emissão proveniente deste objeto, poucos dias após a primeira detecção.

A mera descoberta desta emissão de rádio descartou um certo intervalo de modelos teóricos naquele tempo.

A figura a seguir mostra a distribuição de GRBs descoberta pelo experimento BATSE:

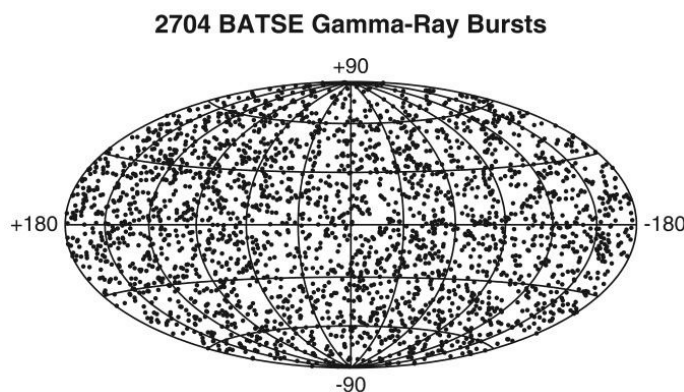



Figure 7.10: GRBs descobertos pelo BATSE

Após três décadas de mistério, astrônomos agora sabem que GRBs, os mais violentos eventos no Universo, ocorreram em galáxias muito afastadas da nossa, há bilhões de anos atrás.

Esta evidência suporta a teoria de que GRBs resultam ou do colapso estelar ou da fusão de dois objetos compactos. Isto é motivado pela existência de dois perfis de raios gama observados: curtos e longos.

O último é denominado colapsar e este evento pode dar surgimento a um Buraco Negro muito massivo. A análise dos eventos de GRBs é afetada pelo meio interestelar: a matéria interveniente interage com os raios gama, e provoca algum ruído nos dados recebidos. **Conclusões:**

A partir das seções prévias descobrimos que existem quatro fortes argumentos observacionais para a existência de buracos negros:

1) o raio X emitido do disco de acréscimo de gás nos sistemas binários.

2) ondas gravitationais detectadas pelo LIGO nos eventos de fusão de Buracos Negros estelares.

3) GRBs: breves explosões de energia associadas ao colapso estelar dando origem a Buracos Negros.

Chapter 8

A descrição de Buracos Negros em outras coordenadas

8.1 Coordenadas de Schwarzschild

A geometria de Schwarzschild será deduzida no capítulo 9, usando os métodos canônicos. Neste, iremos analisar as propriedades da métrica.

As coordenadas de Schwarzschild são dadas por: (t, r, θ, ϕ) onde: $0 < r < \infty$, $-\pi < \theta < +\pi$ e $0 < \phi < 2\pi$.

Existem duas singularidades nesta métrica (uma das quais pode ser removida):

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{8.1}$$

esta singularidade é aparente, mas a outra:

$$r = 0 \tag{8.2}$$

é uma singularidade física, e não pode ser removida a partir de uma transformação de coordenadas. Para eliminar algumas das singularidades, basta uma mudança para outro sistema de coordenadas.

8.2 Coordenadas de Eddington-Filkenstein

Existe uma singularidade aparente em $r = 2m$ na geometria de Schwarzschild. A primeira tentativa de nos livrarmos dela faz uso das coordenadas de Eddington-Filkenstein. Essas coordenadas são definias pela mudança:

$$r^* = r + 2mln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \tag{8.3}$$

e:

$$u = t - r^* \tag{8.4a}$$

$$v = t + r^* \tag{8.4b}$$

A diferencial da eq.(8.3) é:

$$dr^* = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \tag{8.5}$$

Agora, usando a eq.(8.4) é fácil mostrar que:

$$dt = dv - \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \tag{8.6}$$

Portanto:

$$dt^2 = dv^2 - \frac{2dvdr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{dr^2}{(1 - \frac{2m}{r})^2} \tag{8.7}$$

Inserindo na métrica de Schwarzschild obtém-se:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[dv^2 - \frac{2dvdr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{dr^2}{(1 - \frac{2m}{r})^2}\right] + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \tag{8.8}$$

Simplificando-a gera-se:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{8.9}$$

Nota-se que esta métrica é bem comportada no limite: $r \to 2m$ não aparecendo quaisquer singularidades. Entretanto, a singularidade em $r = 0$ permanece. De fato, a singularidade em $r = 0$ não é removível. Agora, estamos prontos para estudar o movimento radial de partículas dentro de $r < 2m$.

8.3 Movimento Radial de raios de luz em $r < 2m$

Vamos estudar o movimento radial de raios de luz nas coordenadas de Eddington-Filkenstein. Se o movimento é radial tem-se:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr \tag{8.10}$$

Uma vez que estamos considerando raios de luz: $ds^2 = 0$, então ela se reduz a:

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0 \tag{8.11}$$

É muito fácil escrevê-la como:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \tag{8.12}$$

Integrando-a obtém-se:

$$v(r) = 2m + 4mln|r - 2m| + C \tag{8.13}$$

onde C é uma constante de integração.

Para obter gráficos numéricos de $v(r)$ no computador, defina $m = 1$, usando o Maple:

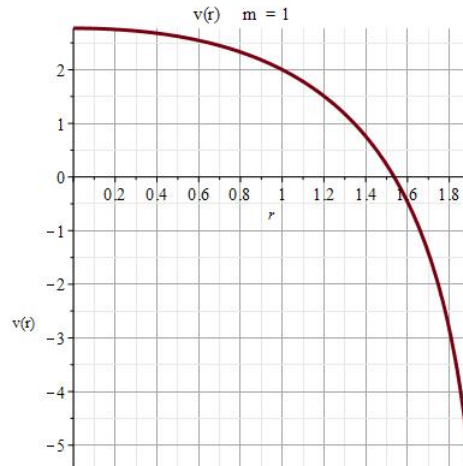



Figure 8.1: o caminho dos raios de luz que atingem a singularidade em tempo finito

Os cones de luz apontam para a singularidade $r = 0$ se os raios de luz estão dentro de $r < 2m$, pois conforme $v(r)$ cresce, $r \to 0$. Consequentemente, partículas massivas e raios de luz caem na singularidade, inevitavelmente.

Visto que a singularidade possui efeitos de maré (proporcionais a r^{-3}), estas imensas forças divergem nesta localização. Todo e qualquer corpo sólido

é deformado e desintegrado na singularidade. Desta forma, a singularidade marca a ruptura do campo clássico, e somente correções quânticas sobre a teoria da gravidade podem tentar descrever o verdadeiro comportamento da matéria na singularidade.

Os raios de luz, emergentes, são dados pelo gráfico abaixo:

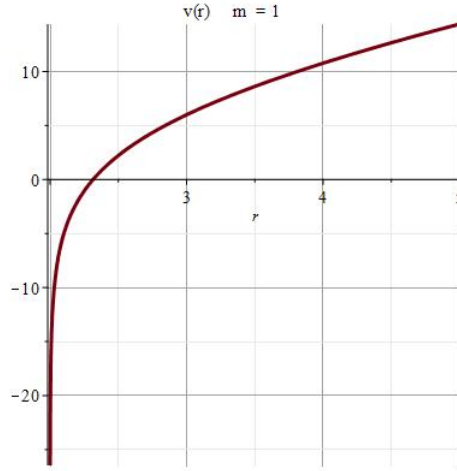



Figure 8.2: raios de luz emergentes

Esta análise mostra que se você cruzar o horizonte de eventos em $r = 2m$, o seu destino será atingir a singularidade, e em um tempo próprio muito curto. O cone de luz aponta necessariamente para a singularidade. O contorno $r = 2m$ se comporta como uma membrana sem retorno (one-way).

8.4 A extensão de Kruskal-Szekeres

As coordenadas de Kruskal-Szekeres extendem a geometria de Schwarzschild na região $r < 2m$, e também descreve a região $r > 2m$. Elas são definidas por:

$$\begin{aligned} & r > 2m : \\ & u = e^{r/4m}\sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ & v = e^{r/4m}\sqrt{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{aligned} \tag{8.14}$$

e

$$
\begin{aligned}
& r < 2m : \\
& u = e^{r/4m}\sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)}sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\
& v = e^{r/4m}\sqrt{\left(1 - \frac{r}{2m}\right)}cosh\left(\frac{t}{4m}\right)
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Usando essas variáveis, pode-se escrever a métrica de Schwarzschild em uma nova forma:

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r}e^{-r/2m}\left(du^2 - dv^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{8.16}$$

Pode-se plotar um diagrama u versus v. Para $r > 2m$ obtém-se:

$$u^2 - v^2 = e^{r/2m}\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \tag{8.17}$$

Trajetórias circulares $r = cte$ correspondem a hipérboles no diagrama, de acordo com a eq.(8.17). Quando $r = 2m$ obtemos:

$$u^2 - v^2 = 0 \rightarrow u = \pm|v| \tag{8.18}$$

e são linhas retas. Agora, temos também:

$$\frac{v}{u} = tanh\left(\frac{t}{4m}\right) \tag{8.19}$$

No limite $t \rightarrow \pm\infty$ obtém-se:

$$v \rightarrow \pm u \tag{8.20}$$

Finalmente, se $r = 0$ obtemos a hipérbole:

$$v^2 - u^2 = 1 \tag{8.21}$$

Os resultados acima geram o diagrama abaixo:

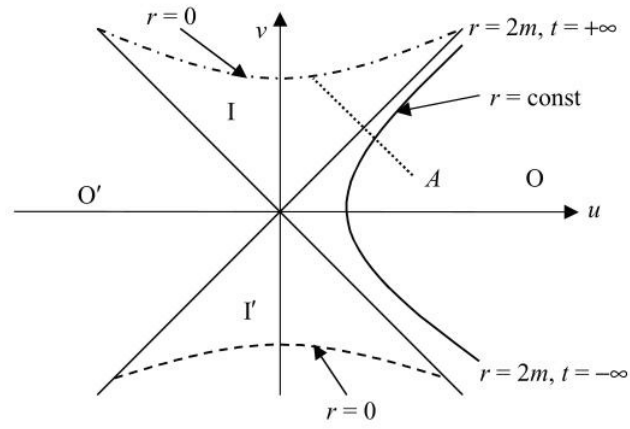



Figure 8.3: espaço-tempo em um corpo esférico, nas coordenadas de Kruskal-Szekeres

Chapter 9

Buracos Negros com rotação

9.1 A métrica de Buracos Negros em rotação

No Universo real, corpos têm momento angular, e portanto, a métrica deve descrever a rotação. Buracos Negros com momento angular são mais interessantes pois novos efeitos surgem aqui: um efeito de arrasto no espaço-tempo implica que não há repouso para partículas fora de um Buraco Negro em rotação. Esta rotação pervade o espaço-tempo, e partículas são arrastadas por ele.

Um Buraco Negro com rotação possui dois horizontes de evento. Entre eles há uma região chamada erogesfera. A métrica de Kerr metric é muito complexa e pode ser descrita de diversos modos. Nas coordenadas de Boyer-Lindquist, a métrica de Kerr é dada por:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2mr}{\Sigma(r,\theta)}\right] dt^2 + \left[\frac{4amrsin^2(\theta)}{\Sigma(r,\theta)}\right] d\Phi dt + \frac{\Sigma(r,\theta)}{\Delta(r,\theta)} dr^2 + \Sigma(r,\theta) d\theta^2$$
$$+ \left[r^2 + a^2 + \frac{2a^2mrsin^2(\theta)}{\Sigma(r,\theta)}\right] sin^2(\theta) d\Phi^2 \tag{9.1}$$

com:

$$\Delta(r,\theta) = r^2 - 2mr + a^2 \tag{9.2a}$$
$$\Sigma(r,\theta) = r^2 + a^2cos^2(\theta) \tag{9.2b}$$

Portanto, algumas componentes são:

$$\begin{cases} g_{tt} = -\left[1 - \frac{2mr}{\Sigma(r,\theta)}\right] \\ g_{t\Phi} = g_{\Phi t} = \frac{2amrsin^2(\theta)}{\Sigma(r,\theta)} \\ g_{rr} = \frac{\Sigma(r,\theta)}{\Delta(r,\theta)} \\ g_{\theta\theta} = \Sigma(r,\theta) \\ g_{\Phi\Phi} = +\left[r^2 + a^2 + \frac{2a^2mrsin^2(\theta)}{\Sigma(r,\theta)}\right] sin^2(\theta) \end{cases} \tag{9.3}$$

As componentes da métrica são independentes de t e Φ. Isto significa que existem dois vetores de Killing: ∂_t and ∂_Φ correspondentes a estas simetrias.

Vamos simplificar a métrica acima. Escolha $\theta = \frac{\pi}{2}$, $d\theta = 0$ e a métrica será escrita como:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left[1 - \frac{2m}{r}\right] dt^2 + \frac{4ma}{r} dtd\Phi + \\ &+ \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right]} + \left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2ma^2}{r^3}\right] r^2 d\Phi^2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Vamos analisar as trajetórias relativas ao plano $\theta = \frac{\pi}{2}$.

9.2 Horizontes e Ergoesfera

A métrica eq.(30) mostra duas armadilhas em potencial. Vamos resolver a componente $g_{tt} = 0$:

$$1 - \frac{2m}{r} = 0 \rightarrow r = 2m \tag{9.5}$$

esta quantidade é conhecida como **limite estático**. Mas, a componente g_{rr} diverge quando o denominador é zero. Vamos resolvê-lo:

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2}{r^2} = 0 \tag{9.6}$$

A equação tem duas raízes, dadas por:

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \tag{9.7}$$

Naturalmente, recupera-se a métrica de Schwarzschild se $a = 0$, correspondendo a momento angular nulo.

A partir desta expressão, obtém-se um limite superior ao momento angular, visto que o argumento da raiz deve ser positivo:

$$a_{max} = m \tag{9.8}$$

Quando o Buraco Negro tem o máximo momento angular, o seu horizonte de eventos é localizado em $r = m$. Consequentemente, ele possui a metade do raio de Schwarzschild's! Desta forma, Buracos Negros com rotação, são menores do que aqueles sem rotação, com as mesmas massas.

Temos a seguinte situação: existem dois horizontes de evento: $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ é o mais externo e $r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}$ é o mais interno.

O horizonte de eventos interno é oculto, a partir de fora. Novamente, todas as partículas e observadores que cruzam o horizonte externo, não podem mais retornar ao exterior.

A superfície $r = 2m$ jaz fora e representa a **superfície de redshift infinito**.

Mas, a membrana 'one way' jaz em r_+ e se qualquer partícula atravessá-la, ela não poderá sair. Não há escape a partir do Buraco Negro para qualquer objeto que cruze a membrana em $r = r_+$. Este é chamado horizonte de eveentos externo.

Em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, o horizonte e a superfície de resdhift infinito, coincidem, então, todas as partículas que atravessam esses pontos não podem escapar do Buraco Negro.

A ergoesfera é o volume entre essas superfícies, definida pelo limite estático e o horizonte externo, isto é, a região entre $r+ < r < 2m$.

Dentro da ergoesfera encontra-se um efeito de 'arrasto' dos referenciais: um objeto colocado nesta região é arrastado na direção da rotação, independente da energia ou estado de movimento prévio, da partícula. Todas as geodésicas tipo-tempo, dentro da ergoesfera, rodam junto com o Buraco Negro! Em outras palavras, os cones de luz apontam na direção da rotação.

A superfície $r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}$ é conhecida como horizonte de Cauchy. Dentro da região: $r_- < r < r_+$ todas as partículas se movem em direção do horizonte de Cauchy, pois a coordenada radial é uma coordenada tipo-tempo. O cone de luz futuro aponta para a superfície de Cauchy.

9.3 Arrasto dos referenciais

A natureza rotacional da solução de Kerr leva a um interessante efeito conhecido como arrasto dos referenciais. Se soltarmos uma partícula (sem momento angular inicial), em direção de um Buraco Negro (com rotação), do infinito, conforme ela se aproximar do objeto em rotação, ela começará a ganhar momento angular na direção na qual a fonte está rodando.

Os cálculos sobre esta métrica são tediosos, desta forma, vamos mostrar como extrair alguma informação útil usando ferramentas computacionais. Aqui, iremos usar o Maple e suas assombrosas capacidades de cálculo.

A partir da métrica de Kerr, podemos extrair as componentes inversas que são dadas por:

$$g^{tt} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta} \tag{9.9}$$

$$g^{t\Phi} = \frac{2mar}{\Sigma\Delta} \tag{9.10}$$

$$g^{\Phi\Phi} = \frac{a^2 sin^2(\theta) - \Delta}{\Sigma\Delta} \tag{9.11}$$

Pode-se extrair as componentes inversas da eq.(9.1). O Maple tem diversas soluções exatas, formando uma base de dados. A métrica de Kerr, nas coordenadas de Boyer-Lindquist é indexada nesta base como [5,9,1]. Esta é a mesma base do livro de Stephani. Para carregar as métricas existentes, rode a biblioteca. A biblioteca *Physics* deve rodar, e escreva o comando: *with(Physics);* em uma planilha no Maple. Em seguida, pressione ENTER. O Maple irá mostrar uma saída na cor azul, veja o diagrama abaixo:

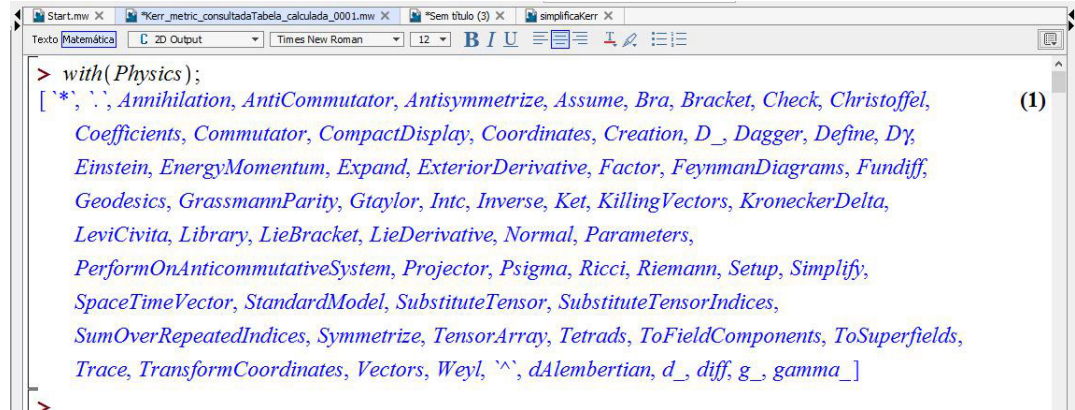



Figure 9.1: executando a biblioteca **Physics**

Agora, carregue a métrica de Kerr: sua identificação é dada por: [5,29,1] na base de dados do livro de Stephani: *Einstein's exact solutions*. Escreva: Setup(metric = [5,29,1]); e pressione ENTER para carregar a métrica de Kerr e alguma informação útil, a partir dela.

```
> Setup(mathematicalnotation = true);
```

[*mathematicalnotation* = *true*] **(2)**

```
> Setup(metric = [5, 29, 1]);
```

Systems of spacetime Coordinates are: $\{X = (t, r, \theta, \phi)\}$

Default differentiation variables for d_, D_ and dAlembertian are: $\{X = (t, r, \theta, \phi)\}$

The Kerr (1963) metric in coordinates $[t, r, \theta, \phi]$

Parameters: $[a, m]$

Comments: Boyer-Lindquist coordinates

$$\left[metric = \left\{(1,1) = \frac{2\,m\,r - r^2 - a^2\cos(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}, (1,4) = -\frac{2\,m\,r\,a\sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}, (2,2) = \frac{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}{a^2 - 2\,m\,r + r^2}, (3,3) = r^2 + a^2\cos(\theta)^2, (4,4) = \frac{\sin(\theta)^2\left(a^2\left(a^2 - 2\,m\,r + r^2\right)\cos(\theta)^2 + \left(2\,m\,r + r^2\right)a^2 + r^4\right)}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right\}\right] \quad \textbf{(3)}$$

Figure 9.2: carregando a métrica de Kerr

Para apresentar as componentes da métrica, use $g_{[5,29,1]}$; e pressione ENTER:

```
> g_[5, 29, 1];
```

$$g_{\mu,\nu} = \left[\left[\frac{2\,m\,r - r^2 - a^2\cos(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}, 0, 0, -\frac{2\,m\,r\,a\sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right], \left[0, \frac{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}{a^2 - 2\,m\,r + r^2}, 0, 0\right], \left[0, 0, r^2 + a^2\cos(\theta)^2, 0\right], \left[-\frac{2\,m\,r\,a\sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}, 0, 0, \frac{\sin(\theta)^2\left(a^2\left(a^2 - 2\,m\,r + r^2\right)\cos(\theta)^2 + \left(2\,m\,r + r^2\right)a^2 + r^4\right)}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right]\right]$$

Figure 9.3: componentes da métrica de Kerr

Estamos prontos para extrair a componentes da métrica inversa:

> g_`~mu`, `~nu`, matrix:

$$g^{\mu,\nu} = \left[\left[\frac{-a^2(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^2 - 2a^2mr - a^2r^2 - r^4}{(a^2-2mr+r^2)(r^2+a^2\cos(\theta)^2)}, 0, 0, -\frac{2mra}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)(a^2-2mr+r^2)}\right],\right.$$
$$\left[0, \frac{a^2-2mr+r^2}{r^2+a^2\cos(\theta)^2}, 0, 0\right],$$
$$\left[0, 0, \frac{1}{r^2+a^2\cos(\theta)^2}, 0\right],$$
$$\left.\left[-\frac{2mra}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)(a^2-2mr+r^2)}, 0, 0, \frac{a^2\cos(\theta)^2-2mr+r^2}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)(a^2-2mr+r^2)\sin(\theta)^2}\right]\right]$$

Figure 9.4: carregando a métrica de Kerr

Tendo extraído as componentes da métrica (contravariantes e covariantes) nós podemos calcular os parâmetros orbitais descrevendo o movimento de partículas em torno do objeto central. Vamos iniciar com a velocidade angular.

A velocidade angular da partícula é:

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{p^{\Phi}}{p^{t}} \tag{9.12}$$

Considere que $p_{\Phi} = 0$. Então: $p^{\Phi} = g^{\Phi t} p_t$.

Portanto, obtém-se:

$$\omega = \frac{g^{\Phi t} p_t}{p^t} = \frac{g^{\Phi t} p_t}{g^{tt} p_t} = \frac{2mar}{(r^2+a^2)^2 - a^2 \Delta sin^2(\theta)} \tag{9.13}$$

Para $\theta = 0$, plano equatorial, temos:

$$\omega = \frac{2mar}{(r^2+a^2)^2} \tag{9.14}$$

As componentes $g^{\Phi t}$ e g^{tt} foram extraídas das planilhas Maple, acima. Selecione as componentes na saída, use ctrl+C e ctrl+V para extrair a razão:

>

> $$\frac{-\frac{2mra}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)(a^2-2mr+r^2)}}{\frac{-a^2(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^2-2a^2mr-a^2r^2-r^4}{(a^2-2mr+r^2)(r^2+a^2\cos(\theta)^2)}};$$

$$-\frac{2mra}{-a^2(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^2-2a^2mr-a^2r^2-r^4}$$

Figure 9.5: obtendo a métrica de Kerr

Pode-se usar o Maple para simplificar as expressões acima (ou fazê-lo manualmente, e é muito fácil obter a eq.(9.13)).

9.4 A trajetória da luz na geometria de Kerr

Agora, vamos calcular o movimento do pulso de luz. Para se obter algumas soluções analíticas, estabeleça $\theta = \pi/2$. Isto implica: $\Sigma = r^2$.

Além disso, considere o movimento tangencial $dr = 0$. O movimento da luz é dado por: $ds^2 = 0$, então, a métric se torna:

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{4am}{r} dt d\Phi - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a^2 m}{r^3}\right) r^2 d\Phi^2 \tag{9.15}$$

Finalmente, considera-se que a luz é emitida em $r = r_s = 2m$ e $a = m$. A circunferência reduzida é definida por:

$$R^2 = r^2 + m^2 + \frac{2m^3}{r} \tag{9.16}$$

Se $a = m$ o último termo na métrica reduz a R^2 e pode-se escrever:

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{4m^2}{r} dt d\Phi - R^2 d\Phi^2 \tag{9.17}$$

Dividindo-se por dt^2 tem-se:

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \frac{4m^2}{r}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) - R^2\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \tag{9.18}$$

No limite estático: $r = 2m$ obtém-se: $R^2 = 4m^2 + m^2 + \frac{2m^3}{2m} = 6m^2$.

Desta forma, a trajetória é descrita por:

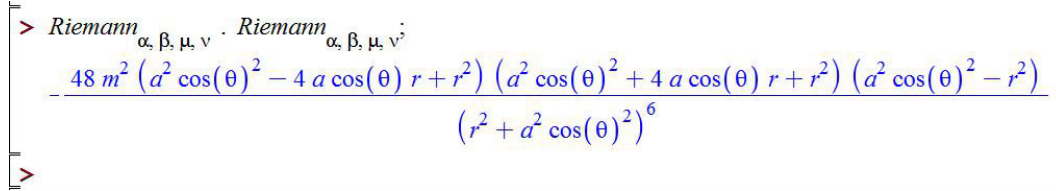
$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 - \frac{1}{3m}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = 0 \tag{9.19}$$

Há duas soluções aqui: $\dot{\Phi} = 0$ ou $\dot{\Phi} = \frac{1}{3m}$.

A segunda solução indica que a luz se move na mesma direção do momento angular do Buraco Negro (este resultado não estłimitado a: $a = m$, e ocorre mesmo se $a < m$).

Mas o primeiro resultado: $\dot{\Phi} = 0$ é surpreendente: se o pulso de luz é emitido na direção oposta, ele permanece estacionário: $\Phi = cte$.

Este é um resultado fabuloso: a luz e partículas massivas não podem permanecer estacionárias em torno de Buracos Negros com rotação! O espaço-tempo em torno de tais objetos gira com ele!

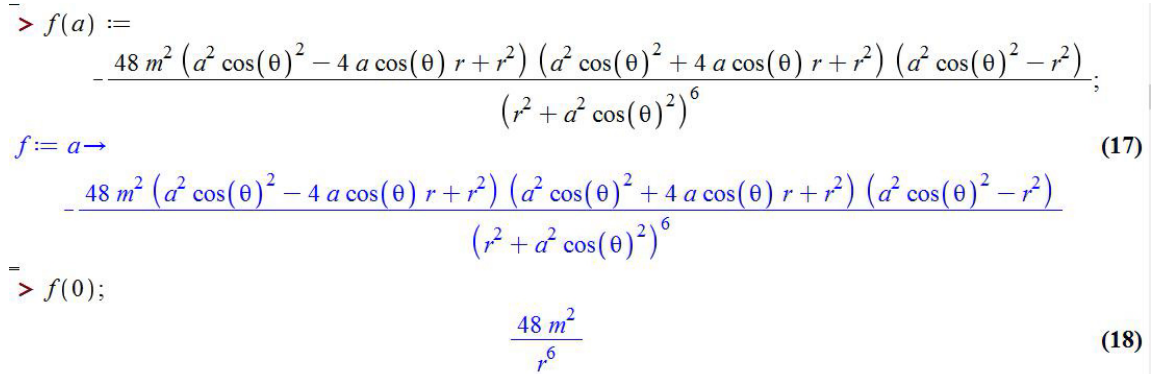
9.5 Obtendo as Singularidades

Podemos usar as ferramentas computacionais para calcular os invariantes a partir da geometria de Kerr. Um desses é o escalar:

$$R^{abcd}R_{abcd} \tag{9.20}$$

Lembre-se de que para a métrica de Schwarzschild, teremos o valor:

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48m^2}{r^6} \tag{9.21}$$

Agora, a métrica é muito diferente, visto que ela é dada pela geometria de Kerr. Podemos usar os procedimentos do Maple para calculá-la:

```
> Riemann_{α,β,μ,ν} . Riemann_{α,β,μ,ν};
```

$$-\frac{48\,m^2\left(a^2\cos(\theta)^2-4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2+4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2-r^2\right)}{\left(r^2+a^2\cos(\theta)^2\right)^6}$$

```
>
```

Figure 9.6: invariantes da métrica de Kerr

Agora, copie e cole a saída da última equação que o Maple gerou. Defina uma função do parâmetro a, use a sintaxe: $f(a) := ...$ e copie a fórmula. Em seguida, calcule-a para $a = 0$. Se os cálculos estiverem corretos, ela deve se reduzir à métrica de Schwarzschild, como deve ser.

```
> f(a) :=
```

$$-\frac{48\,m^2\left(a^2\cos(\theta)^2-4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2+4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2-r^2\right)}{\left(r^2+a^2\cos(\theta)^2\right)^6};$$

$$f := a \rightarrow -\frac{48\,m^2\left(a^2\cos(\theta)^2-4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2+4\,a\cos(\theta)\,r+r^2\right)\left(a^2\cos(\theta)^2-r^2\right)}{\left(r^2+a^2\cos(\theta)^2\right)^6} \tag{17}$$

```
> f(0);
```

$$\frac{48\,m^2}{r^6} \tag{18}$$

Figure 9.7: o invariante é reduzido a zero!

Portanto, voltamos ao resultado prévio onde a singularidade não dependia do momento angular a como se esperava. É evidente que a métrica de Schwarzschild é recuperada quando $a = 0$.

Singularidade:

No plano equatorial plane temos: $\theta = 0$ e a singularidade localiza-se em:

$$r^a + a^2 cos^2(\theta) = 0 \rightarrow r^2 + a^2 = 0 \tag{9.22}$$

Isto corresponde a um anel com raio: $r = a$. Portanto, a singularidade de um Buraco Negro em rotação é um anel que depende momento angular a.

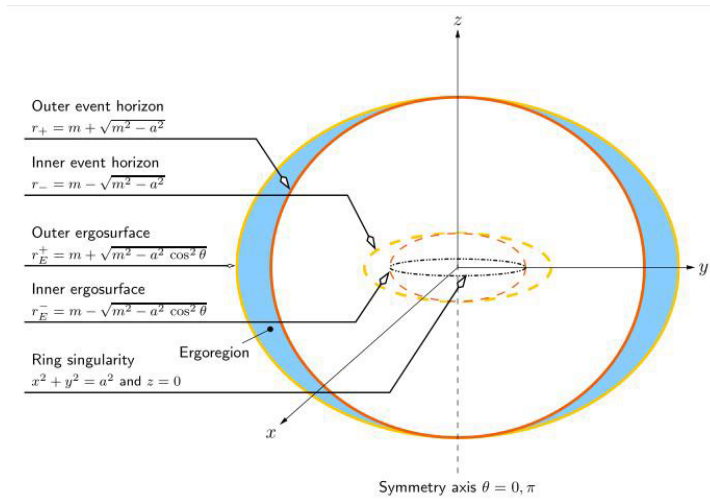



Figure 9.8: estrutura de um Buraco Negro em rotação

O diagrama acima foi extraído de *Matt Visser: The Kerr space-time a brief introduction*, em: gr-qc: 0706.0622v3.

9.6 Verificando a solução de vácuo usando o Maple

Agora, pode-se usar o Maple para provar que a métrica de Kerr corresponde a uma solução das equações de Einstein no vácuo. Na mesma planilha, use os comandos do pacote:

Figure 9.9: tensores de Ricci e Einstein

Observe que a saída mostra um conjunto vazio, visto que não há componentes não-nulas. Isto mostra que a métrica é consistente com o vácuo. As componentes de $G^a{}_b$ podem ser extraídas uma a uma. Use $\sim$ para elevar uma componente:

Figure 9.10: elevando as componentes do tensor de Einsteins

A aproximação de vácuo é excelente para um Buraco Negro isolado, visto que a radiação de fundo é muito tênue.

Chapter 10

Diagramas de Carter-Penrose

10.1 Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski

Vamos construir o diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Minkowski. Em coordenadas polares a métrica é:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{10.1}$$

O intervalo físico das variáveis é:

$$\begin{aligned} -\infty < t < +\infty \\ 0 \leq r < +\infty \end{aligned} \tag{10.2}$$

Neste momento mudamos as variáveis:

$$u = t - r \tag{10.3a}$$

$$v = t + r \tag{10.3b}$$

$$r = \frac{1}{2}(v - u) \tag{10.3c}$$

Agora, calculamos: $du = dt - dr$ e $dv = dt + dr$ e temos também: $-dudv = -dt^2 + dr^2$. Inserindo na eq.(10.1) obtém-se:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2 \tag{10.4}$$

Agora, mudamos as variáveis novamente, introduzindo as definições:

$$U = arctan\,(u) \tag{10.5a}$$
$$V = arctan\,(v) \tag{10.5b}$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq U \leq +\frac{\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2} \leq V \leq +\frac{\pi}{2}\,, U \leq V \tag{10.5c}$$

Diante disso, deve-se calcular as expressões acima:

$$dU = \frac{du}{(1+u^2)} \tag{10.6a}$$
$$dV = \frac{dv}{(1+v^2)} \tag{10.6b}$$

Sabe-se que: $1 + tan(U) = sec^2(U)$ e $1 + tan(V) = sec^2(V)$.
Portanto, obtém-se:

$$du = sec^2(U)dU \tag{10.7a}$$
$$dv = sec^2(V)dV \tag{10.7b}$$

Inserindo essas relações na métrica eq.(10.4) leva a:

$$ds^2 = -\frac{sec^2(U)sec^2(V)}{2}\,(dUdV + dVdU) + \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2 \tag{10.8}$$

Expandindo $(v-u)^2$ em termos das novas variáveis:

$$\begin{aligned}
&(v-u)^2 = (tan(U) - tan(V))^2 = \\
&= tan^2(U) - 2tan(U)tan(V) + tan^2(V) = \\
&= \frac{sin^2(V)}{cos^2(V)} - 2\frac{sin(V)sin(U)}{cos(V)cos(U)} + \frac{sin^2(U)}{cos^2(U)} = \\
&= \frac{sin^2(V)cos^2(U)}{cos^2(V)cos^2(U)} - 2\frac{sin(V)sin(U)cos(U)cos(V)}{cos^2(V)cos^2(U)} + \frac{sin^2(U)cos^2(V)}{cos^2(U)cos^2(V)} = \\
&= \frac{1}{cos^2(V)cos^2(U)}\left[sin^2(V)cos^2(U) - 2sin(U)sin(V)cos(U)cos(V) + sin^2(U)cos^2(V)\right] \\
&= \frac{1}{cos^2(V)cos^2(U)}\left[sin^2(V-U)\right]
\end{aligned} \tag{10.9}$$

Portanto, a eq.(10.8) torna-se:

$$ds^2 = \frac{1}{4cos^2(V)cos^2(U)}\left[-2(dUdV + dVdU) + sin^2(V-U)d\Omega^2\right] \quad (10.10)$$

Finalmente, define-se:

$$T = U + V \quad (10.11a)$$
$$R = V - U \quad (10.11b)$$

a partir da qual obtém-se:

$$dT = dU + dV \rightarrow dT^2 = dU^2 + 2dUdV + dV^2 \quad (10.12)$$

$$dR = dV - dU \rightarrow dR^2 = dV^2 - 2dUdV + dU^2 \quad (10.13)$$

Logo:

$$-dT^2 + dR^2 = -2dUdV - 2dVdU \quad (10.14)$$

e a métrica se torna:

$$ds^2 = \frac{1}{4cos^2(V)cos^2(U)}\left[-dT^2 + dR^2 + sin^2(R)d\Omega^2\right] \quad (10.15)$$

É muito fácil ver que esta métrica é plano-conforme à métrica de Minkowski. Definimos uma métrica plano-conforme se pudermos escrevê-la como:

$$ds^2 = \omega^2(,)ds^2_{Mink} \quad (10.16)$$

onde ds^2_{Mink} é a métrica de Minkowski e $\omega^2(,)$ é uma nova e contínua função das novas variáveis.

Para desenhar o diagrama de Carter-Penrose, vamos definir os pontos:

$$i^+ = \begin{cases} T = \pi \\ R = 0 \end{cases} \quad (10.17)$$

$$i^0 = \begin{cases} T = 0 \\ R = \pi \end{cases} \quad (10.18)$$

$$i^- = \begin{cases} T = -\pi \\ R = 0 \end{cases} \quad (10.19)$$

e as regiões:

$$I^+ = \begin{cases} T = \pi - R \\ 0 < R < \pi \end{cases} \tag{10.20}$$

$$I^- = \begin{cases} T = -\pi + R \\ 0 < R < \pi \end{cases} \tag{10.21}$$

no plano $T - R$ são obtidas linhas retas. É muito fácil agora, desenhar o diagrama abaixo baseado nas definições prévias eqs.(10.17-21) acima:

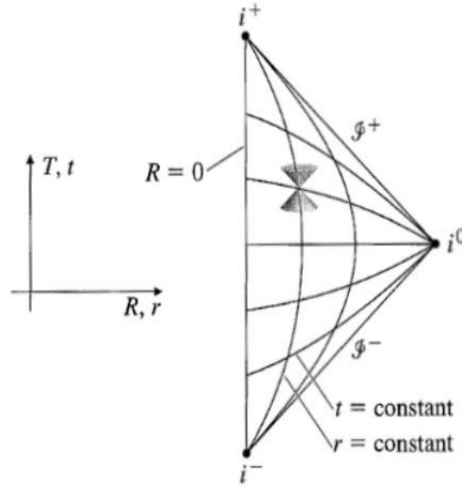



Figure 10.1: diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski

O diagrama acima contém o espaço-tempo inteiro em uma região que é compacta e finita! Partículas em repouso na origem $r = 0$ são representadas por curvas que começam em i^- e terminam em i^+. Partículas a diferentes distâncias da origem mas no mesmo instante, são representadas por linhas que terminam em i^0. Outras curvas irão representar partículas em movimento que terminam em I^+ (essas curvas não estão representadas acima).

10.2 Diagrama de Carter-Penrose para espaço-tempo de Schwarzschild

O elemento de linha de um Buraco Negro, sem carga e momento angular, é dado pela métrica de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \tag{10.22}$$

O elemento de linha tem a massa M como o seu único parâmetro e é estática. Os seguintes limites são obedecidos por esta métrica:

1) Para $M = 0$ recupera-se o elemento de linha de Minkowski, como deveria ser e,

2) No limite: $r \to \infty$ o elemento de linha também se torna progressivamente Minkowski.

A propriedade acima é muito importante e as métricas que a satisfazem chamam-se assintoticamente planas.

É muito importante notar que todas as soluções exatas que descrevem Buracos Negros devem satisfazer 2) acima: um Buraco Negro é uma solução exata das equações de Einstein onde o espaço-tempo é assintoticamente plano, contendo uma superfície nula finita que define o seu horizonte de eventos.

Note que todas as partículas que entram em um Buraco Negro não podem escapar dele, uma vez que o cone de luz de cada partícula aponta para $r = 0$. O cone de luz limita as trajetórias fisicamente possíveis no espaço-tempo.

Vamos explorar a estrutura causal desta métrica, estudando os cones de luz. Faça: $ds^2 = 0$ e considere o movimento radial: $d\theta = d\phi = 0$. Resolvendo $ds^2 = 0$ obtém-se:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{10.23}$$

Esta derivada mede a abertura do cone de luz no diagrama $t - r$. Para $r >> 2M$ temos: $\frac{dt}{dr} = \pm 1$ que corresponde a uma reta com $\frac{\pi}{4}$ de inclinação. Mas para: $r \to 2M$ a inclinação tende a: $\pm\infty$. A figura seguinte mostra esses cones de luz:

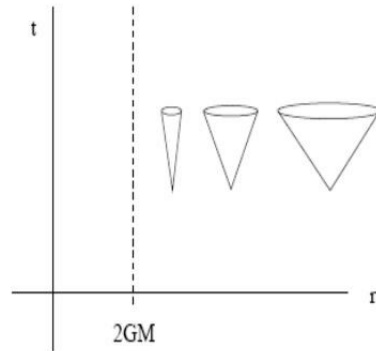



Figure 10.2: cones de luz no diagrama t-r (coordenadas de Schwarzschild)

Note que para $r < 2M$ o sinal relativo de dt^2 inverte se comparado aos outros termos na métrica. Isto significa que espaço e tempo invertem o seu significado dentro de um Buraco Negro.

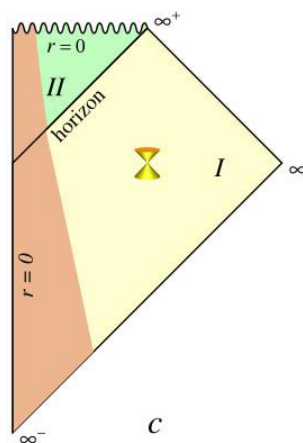



Figure 10.3: diagrama de Carter-Penrose de um Buraco Negro formado

A figura acima mostra a matéria em colapso formando um Buraco Negro (o tempo está na vertical).

Uma singularidade se forma na linha horizontal do diagrama. A partir deste ponto, nenhuma geodésica continua e o espaço-tempo tem uma singularidade: ele não é completo.

Chapter 11

A métrica de Schwarzschild

11.1 Geometria e Relatividade

As equações de Einstein relacionam o conteúdo de matéria-energia em um espaço-tempo com a geometria dele. Nesta teoria, não há força de gravidade: a gravidade se manifesta como a curvatura no espaço-tempo e não como uma força, as partículas seguem as geodésicas deste espaço curvo.

As outras ações são forças e são visualizadas como agentes externos que desviam as partículas do seu movimento natural (movimento geodésico).

Vammos resolver as equações de Einstein para o caso mais simples possível: uma massa estática, sem rotação e sem carga elétrica, no vácuo. A solução exata foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, e aqui, iremos obtê-la usando-se os procedimentos do cálculo de tensores.

A obtenção de uma solução para as equações de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \tag{11.1}$$

passa pela escolha de uma métrica que simule simetrias geométricas e físicas do espaço-tempo.

Em seguida, procura-se interpretar qual é a fonte de energia-matéria que é consistente com a métrica que foi escolhida e que gerou o tensor de Einstein. Diga-se de passagem que a interpretação da métrica obtida nem sempre é óbvia e é trabalho de pesquisa até hoje. Adicionalmente, sistemas mais complicados (dois Buracos Negros em colisão, por exemplo) são impossíveis de serem obtidos manualmente, e recorre-se ao uso de supercomputadores, onde os mesmos geram gráficos como resposta.

Com o objetivo de resolver as equações de Einstein, nós começamos com um elemento de linha. O melhor palpite (ansatz) para um elemento de linha é aquele que seja guiado por considerações de simetria. Damos preferência a

um elemento de linha com simetria esférica, pois pretendemos que o mesmo descreva o campo gravitacional de uma massa estática M. Além disso, iremos impor que os coeficientes sejam independentes do tempo. Lembre-se que um elemento de linha geral, no sistema de coordenadas X^a é escrito na forma:

$$ds^2 = g_{ab}(X)dX^a dX^b \tag{11.2}$$

Precisamo calcular: g^{ab} o inverso de g_{ab}, onde ambos satisfazem: $g_{ab}g^{bc} = \delta^c{}_a$.

Para obtermos um palpite sobre a simetria esférica, lembre-se que o elemento de linha do espaço-tempo vazio de Minkowiski, em coordenadas esféricas é dado por:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{11.3}$$

onde: $X^a = (ct, r, \theta, \phi)$. A simetria esférica é descrita pelos dois últimos termos da métrica acima, logo, o nosso palpite é que esses dois termos não serão modificados na presença de uma massa estática. Iremos modificar os dois primeiros termos.

Adicionalmente, vamos supor que não há matéria fora da massa, logo, além da condição de ser estática, iremos lidar com vácuo fora desta massa.

Por outro lado, as equações de Einstein podem ser escritas na forma mais simples:

$$R_{ab} = -8\pi\left(T_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}T\right) \tag{11.4}$$

onde: $T = T^a_a$ é o traço de T_{ab}.

Uma vez que o espaço-tempo é vácuo, fora da massa, as equações de Einstein se reduzem a $(T_{ab} = 0, T = 0)$:

$$R_{ab} = 0 \tag{11.5}$$

Resumindo: vamos resolver as equações de Einstein para uma métrica isotrópica, estática no vácuo. O nosso palpite é que a massa introduza uma alteração nos primeiros coeficientes do elemento de linha, de modo que iremos escrever:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{11.6}$$

Ou seja, em forma matricial ela é diagonal dada por:

$$g_{ab} = diag\left(A(r), -B(r), -r^2, -r^2sin^2(\theta)\right) \tag{11.7}$$

cuja inversa é facilmente calculável:

$$g^{ab} = diag\left(\frac{1}{A(r)}, -\frac{1}{B(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\right) \tag{11.8}$$

Com este ansatz, iremos partir para o cálculo dos tensores necessários.

11.2 Tensores a partir da métrica

É importante definir os tensores que são obtidos a partir da métrica, com o objetivo de construir as componentes do tensor de curvatura, o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Os símbolos de Christoffel são definidos por:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{g^{ad}}{2}\left(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}\right) \tag{11.9}$$

O próximo é o tensor de Riemann que é definido por:

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ec} \tag{11.10}$$

e o tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = -R^c{}_{abc} \tag{11.11}$$

O escalar de Ricci: $R = g^{ab}R_{ab} = R^a{}_a$ não será necessário, visto que as equações de Einstein foram colocadas na forma bem simples: $R_{ab} = 0$.

Iremos calcular manualmente, e usando o formalismo básico de tensores. Outras abordagens, como o formalismo de Cartan, foi executada nos capítulos anteriores, e em um próximo, iremos resolvê-las usando o programa Maple 2016.

11.3 Calculando a Conexão

Para calcular o tensor de Ricci, é necessário calcular os símbolos de Christoffel a partir da métrica:

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{g^{ad}}{2}\left(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}\right) \tag{11.12}$$

onde: $g_{ab,c}$ denota a derivada parcial com relação à coordenada x^c. Neste caso, as coordenadas são: (t, r, θ, ϕ). Logo, teremos:

$$g_{bd,c} = \frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} \tag{11.13}$$

A partir da definição eq.(11.17) as únicas componentes não nulas são:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A} \tag{11.14a}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2B} \tag{11.14b}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B} \tag{11.14c}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B} \tag{11.14d}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{rsin^2(\theta)}{B} \tag{11.14e}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \tag{11.14f}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \tag{11.14g}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{tan(\theta)} \tag{11.14h}$$

$$\Gamma^2_{33} = -sin(\theta)cos(\theta) \tag{11.14i}$$

Aqui: $A' = \frac{dA}{dr}$, a derivada com relação à coordinate r. Recorde que essas componentes já foram calculadas no capítulo 2. A partir delas, podemos proceder a calcular o tensor de curvatura, o que faremos nas próximas seções.

11.4 Componentes do tensor de Ricci

As componentes do tensor de Ricci da métrica de Schwarzschild's são dadas por (únicas não nulas, do lado esquerdo):

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0 \tag{11.15a}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} = 0 \tag{11.15b}$$

$$R_{22} = \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{B} - 1 = 0 \tag{11.15c}$$

$$R_{33} = R_{22} sin^2(\theta) = 0 \tag{11.15d}$$

e tais componentes são nulas do lado direito visto que: $R_{ab} = 0$, para todo a, b. O nosso objetivo é encontrar a forma de $A(r)$ e $B(r)$, mas antes disso, vamos ver como chegamos ao lado esquerdo de cada equação acima.

11.5 Calculando o tensor de Riemann

Agora, conhecendo-se as componentes de $\Gamma^a{}_{bc}$ podemos usar a definição do tensor de Riemann:

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ec}$$

Desta forma, temos:

$$R^0{}_{ab0} = \partial_b \Gamma^0{}_{a0} - \partial_0 \Gamma^0{}_{ab} + \Gamma^e{}_{0a}\Gamma^0{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^0{}_{e0} \quad (11.16a)$$
$$R^1{}_{ab1} = \partial_b \Gamma^1{}_{a1} - \partial_1 \Gamma^1{}_{ab} + \Gamma^e{}_{1a}\Gamma^1{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^1{}_{e1} \quad (11.16b)$$
$$R^2{}_{ab2} = \partial_b \Gamma^2{}_{a2} - \partial_2 \Gamma^2{}_{ab} + \Gamma^e{}_{2a}\Gamma^2{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^2{}_{e2} \quad (11.16c)$$
$$R^3{}_{ab3} = \partial_b \Gamma^3{}_{a3} - \partial_3 \Gamma^3{}_{ab} + \Gamma^e{}_{3a}\Gamma^3{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^3{}_{e3} \quad (11.16d)$$

Neste momento, não é preciso abrir os termos: $\Gamma^e{}_{0a}\Gamma^0{}_{eb}$ pois deve-se observar que diversos termos em $\Gamma^a{}_{bc}$ são nulos. Observe-os antes. Somando-se o lado esquerdo na vertical, iremos obter:

$$-R_{ab} = R^0{}_{ab0} + R^1{}_{ab1} + R^2{}_{ab2} + R^3{}_{ab3} \quad (11.17)$$

Calculemos $-R_{00}$ primeiro. Colocando $a = b = 0 \rightarrow$, a tabela acima se reduz a:

$$R^0{}_{000} = \partial_0 \Gamma^0_{00} - \partial_0 \Gamma^0_{00} + \Gamma^e_{00}\Gamma^0_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^0_{e0} \quad (11.18a)$$
$$R^1{}_{001} = \partial_0 \Gamma^1_{01} - \partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^e_{10}\Gamma^1_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^1_{e1} \quad (11.18b)$$
$$R^2{}_{002} = \partial_0 \Gamma^2_{02} - \partial_2 \Gamma^2_{00} + \Gamma^e_{20}\Gamma^2_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^2_{e2} \quad (11.18c)$$
$$R^3{}_{003} = \partial_0 \Gamma^3_{03} - \partial_3 \Gamma^3_{00} + \Gamma^e_{30}\Gamma^3_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^3_{e3} \quad (11.18d)$$

Simplificações: a primeira linha tem todos os termos se cancelando, em seguida, todos os termos com derivada temporal: $\partial_0 \Gamma$, devem ser nulos, pois a métrica é estática. Somando-se todos os termos, e eliminando os nulos que acabamos de comentar, ficamos com:

$$\begin{aligned} -R_{00} = & -\partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^e_{10}\Gamma^1_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^1_{e1} \\ & -\partial_2 \Gamma^2_{00} + \Gamma^e_{20}\Gamma^2_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^2_{e2} + \\ & -\partial_3 \Gamma^3_{00} + \Gamma^e_{30}\Gamma^3_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^3_{e3} \end{aligned} \quad (11.19)$$

Agora é o momento onde se deve observar a tabela que contém os termos da conexão: $\Gamma^a{}_{bc}$. Observe que: $\Gamma^2{}_{00} = \Gamma^3{}_{00} = 0$, portanto, a soma acima perde 2 termos e se reduz a:

$$
\begin{aligned}
-R_{00} = -\partial_1\Gamma^1_{00} + \Gamma^e_{10}\Gamma^1_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^1_{e1} \\
+\Gamma^e_{20}\Gamma^2_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^2_{e2} + \Gamma^e_{30}\Gamma^3_{e0} - \Gamma^e_{00}\Gamma^3_{e3}
\end{aligned} \tag{11.20}
$$

Agora, observando-se a tabela das componentes de $\Gamma^a{}_{bc}$, com mais atenção, observa-se que é o momento de abrir os termos com o índice e, que implica a soma. Ao abrirmos um termo com o índice e somando, obtemos algo do tipo: $\Gamma^e{}_{10}\Gamma^1{}_{e0} = \Gamma^0{}_{10}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^2{}_{10}\Gamma^1{}_{20} + \Gamma^3{}_{10}\Gamma^1_{30}$. É o que faremos agora para todas as expressões com o índice.

Considere a tabela com as componentes de $\Gamma^a{}_{bc}$, observe a mesma, abra os termos e considere apenas os não nulos. Fazendo-se isto obtêm-se os termos abaixo:

$$
-\Gamma^e_{00}\Gamma^1_{e1} = -\Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} = -\left(\frac{A'}{2B}\right)\left(\frac{B'}{2B}\right) \tag{11.21a}
$$

$$
+\Gamma^e_{20}\Gamma^2_{e0} = 0 \tag{11.21b}
$$

$$
-\Gamma^e_{00}\Gamma^2_{e2} = -\Gamma^1_{00}\Gamma^2_{12} = -\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right) \tag{11.21c}
$$

$$
+\Gamma^e_{30}\Gamma^3_{e0} = 0 \tag{11.21d}
$$

$$
-\Gamma^e_{00}\Gamma^3_{e3} = -\Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} = -\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right) \tag{11.21e}
$$

$$
+\Gamma^e_{10}\Gamma^1_{e0} = \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} = \left(\frac{A'}{2A}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right) \tag{11.21f}
$$

Inserindo todos os termos acima na eq.(11.20) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
-R_{00} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A'}{2B}\right) + \left(\frac{A'}{2A}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right) \\
-\left(\frac{A'}{2B}\right)\left(\frac{B'}{2B}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{A'}{2B}\right)
\end{aligned} \tag{11.22}
$$

onde o primeiro termo é:

$$
-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A'}{2B}\right) = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'B'}{2B^2} \tag{11.23}
$$

e, inserindo-se este, na eq.(11.22) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
-R_{00} &= -\frac{A''}{2B} + \frac{1}{4}\frac{A'B'}{B^2} + \frac{A'^2}{4AB} - \frac{1}{r}\frac{A'}{B} = \\
&= -\frac{A''}{2B} + \frac{1}{4B}\left(\frac{A'B'}{B^2} + \frac{A'^2}{A}\right) - \frac{A'}{rB} \qquad (11.24)
\end{aligned}
$$

lembre-se que A' e B' são as derivadas de A e B com relação a r.

Isto encerra o cálculo da componente: $-R_{00}$, agora, você é capaz de calcular as demais: $-R_{11}, -R_{22}$ e $-R_{33}$, usando os mesmos procedimentos acima. Finalmente, considere que as equações a serem resolvidas são: $R_{ab} = 0$, multiplique os termos acima por -1 para remover o sinal negativo.

Logo, usando-se os mesmos procedimentos acima iremos obter as relações:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0 \qquad (11.25a)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} = 0 \qquad (11.25b)$$

$$R_{22} = \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{B} - 1 = 0 \qquad (11.25c)$$

$$R_{33} = R_{22} sin^2(\theta) = 0 \qquad (11.25d)$$

onde os sinais negativos do lado esquerdo foram suprimidos visto que o lado direito é sempre zero.

11.6 Resolvendo as equações para $A(r)$ e $B(r)$

Podemos eliminar alguns termos nas duas primeiras equações. Multiplicando-se a primeira equação por $\frac{B}{A}$ e somando com a segunda, obtém-se:

$$\frac{B}{A}R_{00} + R_{11} = -\frac{A'}{rA} - \frac{B'}{rB} = 0 \qquad (11.26)$$

multiplicando ambos os termos por: $-r$ e em seguida fatorando os denominadores chega-se a:

$$A'B + AB' = 0 \rightarrow A(r)B(r) = k \qquad (11.27)$$

Portanto $A(r)$ é proporcional a $B(r)$:

$$A(r) = \frac{k}{B(r)} \qquad (11.28)$$

Calculando a derivada temos:

$$A^{'} = -\frac{k}{B}\frac{B^{'}}{B} \rightarrow \frac{A^{'}}{A} = -\frac{B^{'}}{B} \tag{11.29}$$

e, inserindo-se na eq.(11.25c) obtemos:

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 - \frac{rB^{'}}{B^2} = 0 \tag{11.30}$$

Uma simples manipulação algébrica pode transformá-la em:

$$rB^{'} = B - B^2 \rightarrow \frac{B^{'}}{B - B^2} = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{dB}{B(1-B)} = \frac{dr}{r} \tag{11.31}$$

O lado esquerdo pode ser colocado em frações parciais:

$$\int \frac{dB}{B} - \int \frac{dB}{B-1} = ln(r) + ln\left(\frac{1}{r_s}\right) = ln\left(\frac{r}{r_s}\right) \tag{11.32}$$

O segundo termo $ln(\frac{1}{r_s})$ é uma constante de integração, e podemos colocá-la na forma de um logaritmo para aproveitarmos as propriedades de soma e produto deles. Resolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$ln\left(\frac{B}{B-1}\right) = ln\left(\frac{r}{r_s}\right) \tag{11.33}$$

Portanto:

$$\frac{B-1}{B} = \frac{r_s}{r} \tag{11.34}$$

Cuja solução é evidente:

$$B(r) = \frac{1}{(1 - \frac{r_s}{r})} \tag{11.35}$$

e, consequentemente, devido à eq.(11.28):

$$A(r) = k\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \tag{11.36}$$

A constante k pode ser definida como $k = 1$, pois ela define nada mais do que uma escala arbitrária e não física para a escala do tempo, logo:

$$B(r) = \frac{1}{(1 - \frac{r_s}{r})} \tag{11.37}$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \tag{11.38}$$

Portanto, a métrica é escrita como:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2 \tag{11.39}$$

Lembre-se que a parte esfericamente simétrica é: $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2$. Para calcularmos r_s, usamos o fato de que longe da massa devemos recuperar o limite Newtoniano. Desta forma, espera-se que para $r >> r_s$ teremos:

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{11.40}$$

a justificativa para esta forma de g_{00} foi abordada no capítulo 2.

A função: $\Phi(r) = -\frac{Gm}{r}$ é o potencial gravitacional gerado pela fonte de massa m em $r = 0$. Assim sendo, pode-se escrever:

$$-\frac{r_s}{r} = -\frac{2Gm}{c^2 r} \rightarrow r_s = \frac{2Gm}{c^2} \tag{11.41}$$

A escala radial r_s é dada por:

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2} \sim 2.97km\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{11.42}$$

Aqui: r_s é conhecido como raio de Schwarzschild, onde $M_\odot = 2 \times 10^{33}g$ é a massa solar. Em unidades naturais escreve-se: $r_s = 2m$, e o elemento de linha de Schwarzschild, em unidades naturais é escrito como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2 \tag{11.43}$$

e em unidades físicas como:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} - r^2 d\Omega^2 \tag{11.44}$$

Esta métrica foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916 e é uma das mais importantes soluções exatas das equações de Einstein. A partir dela, nós iremos obter as consequências físicas na presença de um corpo estático, sem rotação e sem carga elétrica, no vácuo. O Buraco Negro de Schwarzschild é um caso particular desta métrica onde a extensão espacial do objeto de massa m está inteiramente contida dentro do seu r_s (conjectura do anel de Penrose).

11.7 Desvio gravitacional para o vermelho

Agora, podemos analisar o espaço-tempo em torno de um objeto estático com massa m estudando a métrica que foi obtida na seção prévia.

Considere 2 observadores localizados em 2 pontos no espaço-tempo, em r_E e r_R relativos ao objeto central, e $r_R >> r_E$. Considere que observador em r_E emite um pulso de luz de frequência ν_E. Levantamos a questão: qual é a frequência medida na posição: r_R?

Nós esperamos que o pulso de luz perca energia contra o campo gravitacional, conforme o mesmo se afasta do objeto central. Isto é análogo a uma pedra atirada para cima que perde energia cinética, mas ao contrário da pedra, a perda em energia no fóton se reflete no aumento do seu comprimento de onda. A frequência, deve ser reduzida por um valor que depende da distância relativa entre o ponto de emissão e o ponto de recepção da luz.

Vamos calculá-lo agora. O pulso de luz segue uma trajetória nula, uma geodésica nula no espaço-tempo, portanto: $ds^2 = 0$.

Em unidades naturais, $ds^2 = d\tau^2$, o intervalo é o tempo-próprio, o tempo como medido no referencial local do observador. Se este observador está em repouso com relação à massa central, então $dr = d\theta = d\phi = 0$, portanto, podemos escrever:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \tag{11.45}$$

E, dt é o intervalo como medido por um observador no infinito.

Agora, vamos permitir que um observador em r emita pulsos regulares de luz em dt_E, e cada pulso de luz tem a mesma frequência: ν_E. A frequência medida na fonte está relacionada ao tempo próprio como: $\nu_E = \frac{1}{\Delta\tau_E}$.

Este pulso é medido na segunda localização r_R e sua frequência deve ser: $\nu_R = \frac{1}{\Delta\tau_R}$.

Portanto, temos duas relações:

$$\Delta{\tau_R}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_R}\right) \Delta t^2 \sim \Delta t^2 \tag{11.46}$$

visto que fizemos a suposição: $r_R >> r_E$. Agora, na posição: r_E, próximo ao Buraco Negro, teremos:

$$\Delta{\tau_E}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_E}\right) \Delta t^2 \tag{11.47}$$

Dividindo-se ambos os termos obtém-se:

$$
{\Delta\tau_E}^2 = {\Delta\tau_R}^2 \left(1 - \frac{2M}{r_E}\right) \tag{11.48}
$$

Ou em termos das frequências medidas em cada localização: ($\Delta\tau = \frac{1}{\nu}$).

$$
{\nu_R}^2 = {\nu_E}^2 \left(1 - \frac{2M}{r_E}\right) \tag{11.49}
$$

Agora, escrevemos a frequência medida se o receptor está em $r_R = \infty$:

$$
\nu_R = \nu_E \sqrt{1 - \frac{2m}{r_E}} \tag{11.50}
$$

Portanto, se o pulso emitido é mais próximo ao raio de Schwarzschild, a frequência recebida no infinito é menor, na mesma proporção. Realmente, o limite vale:

$$
\lim_{r_E \to 2m} \nu_R = 0 \tag{11.51}
$$

Isto demonstra que nenhuma radiação é recebida por um observador distante se a radiação é emitida na superfície $r = 2m$. Mas, este valor define o contorno de um Buraco Negro de massa m.

Se o ponto r_E recebe radiação de r_R (radialmente dirigida para dentro) então, a frequência medida em r_E é:

$$
\frac{\nu_R}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r_E}}} = \nu_E \tag{11.52}
$$

se $r \to 2M$ então $\nu_E \to \infty$ como deveria ser (deslocamento para o azul).

11.7.1 A escala de tempo para o sumiço

A equação de movimento para uma fonte luminosa em queda-livre em um buraco negro (radialmente) $r(t)$ pode ser estimada, notando-se que, conforme o tempo passa, ou a fonte se aproxima de $r_s = 2M$, a sua velocidade se aproxima a da luz, e desta forma, sua geodésica se aproxima rapidamente de uma geodésica nula $ds^2 = 0$.

Desta forma, assintoticamente, vamos usar a equação:

$$
\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \tag{11.53}
$$

Tomando o sinal negativo e integrando esta equação de t a t_0 obtém-se:

$$-(r - r_s) - r_s ln\left[r - r_s\right] = c(t - t_0) \quad (11.54)$$

No limite em que $r(t) \to r_s$, o termo com logaritmo domina, logo:

$$r(t) - r_s = e^{-c(t-t_0)/r_s} \quad (11.55)$$

Como $r >> r_s$, a frequência da luz recebida no observador remoto é:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r(t)}\right)} \quad (11.56)$$

Substituindo-se a expressão (11.54), tem-se:

$$\nu(t) = \frac{\nu_0}{\sqrt{r_s}} e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (11.57)$$

onde: $\tau = \frac{2r_s}{c}$. Logo, a frequência da luz recebida no observador remoto, cai exponencialmente rápido no tempo.

A escala de tempo:

$$\tau = \frac{2r_s}{c} \sim 10^{-4}s \text{ para:} M = 5M_\odot \quad (11.58)$$

Vamos dar um exemplo numérico: suponha que a taxa de emissão de fótons seja da ordem de $10^{45}s^{-1}$ fótons (típico do Sol). Em 20 milisegundos, o fator exponencial vai para $e^{-200} = 10^{-87}$. Logo, a taxa de fótons recebidos no observador distante cai para:

$$\frac{dN}{dt} = 10^{-87} \times 10^{45} \sim 10^{-42}s^{-1} \quad (11.59)$$

O que implica que o tempo típico para a emissão do próximo fóton vai para $10^{42}s$. Note que o tempo de vida do universo local é: $10^{17}s$!

Logo, de acordo com o observador distante, uma estrela em colapso gravitacional completo, desaparece de vista em uma fração muito pequena de um segundo!

Resumindo: a luz que é recebida por observadores próximos à superfície de um objeto qualquer, é deslocada para o azul. Por sua vez, a luz proveniente de um objeto e que é recebida por um observador remoto com relação ao mesmo, é deslocada para o vermelho.

A radiação Hawking emitida da superfície de um Buraco Negro sofre um violento deslocamento para o azul, para observadores estáticos próximos ao horizonte de eventos (se comparada à mesma radiação que irá ser medida pelos observadores assintóticos). Desta forma, a temperatura da radiação Hawking diverge no seu horizonte de eventos.

Chapter 12

O movimento de partículas em torno de Buracos Negros

12.1 Definindo a Lagrangeana

O formalismo Lagrangeano é central a todas as teorias de campo, indo da Mecânica à Relatividade Geral e Teoria das Cordas.

Em Mecânica, uma partícula tem Lagrangeana definida por: $L = T - V$, onde T é a energia cinética e V é a energia potencial.

Aqui, devemos generalizar esta construção, levando em conta: o espaço-tempo (4 coordenadas), a métric e a 4-velocidade.

Uma partícula na presença da gravidade é livre, desta forma generalizamos a energia cinética: $L = T = \frac{1}{2}mV^2 \rightarrow g_{ab}V^aV^b$.

Deste modo, uma partícula massiva, movendo-se em torno de uma massa central possui a Lagrangeana:

$$L = g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b \tag{12.1}$$

onde: $\dot{X}^a = \left(\frac{\partial X^a}{\partial \lambda}\right) = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$.

As **equações de Euler-Lagrange** seguem-se do **Princípio Variacional** que determina a estacionariedade da integral de L: $\delta S = \delta \int L d\lambda = 0$.

Considerando-se que existem pontos fixos na trajetória e resolvendo-se a equação acima, obtém-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial X^a} = 0 \tag{12.2}$$

Se λ é o tempo próprio da partícula, a Lagrangeana é:

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1 - \frac{2m}{r})} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 \tag{12.3}$$

Portanto, temos quatro equações:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{12.4a}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{12.4b}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{12.4c}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{12.4d}$$

Vamos resolver cada equação. A eq.(12.4a) é:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{12.5}$$

visto que o tempo não aparece explicitamente. O outro termo na eq.(12.4a) é:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)2\dot{t} \tag{12.6}$$

Mas, a derivada acima é zero:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)2\dot{t}\right] = 0 \tag{12.7}$$

isto implica em:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = E \tag{12.8}$$

onde E é uma constante. Agora, a eq.(12.4b) é:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -\frac{2\ddot{r}}{(1 - 2m/r)} + 4\frac{m}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{(1 - 2m/r)} \tag{12.9}$$

e o termo:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{2m}{r^2}\dot{t}^2 + 2\frac{m}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{(1 - 2m/r)^2} - 2r\dot{\theta}^2 - 2r sin(\theta)\dot{\phi}^2 \tag{12.10}$$

Subtraindo o segundo do primeiro, obtém-se:

$$\frac{\ddot{r}}{(1-2m/r)}+\frac{m}{r^2}\dot{t}^2-\frac{(m/r^2)\ddot{r}^2}{(1-2m/r)^2}-r\dot{\theta}^2-rsin^2(\theta)\dot{\phi}^2=0 \tag{12.11}$$

A eq.(12.4c) é dividida em:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-2sin(\theta)cos(\theta)r^2\dot{\phi}^2 \tag{12.12}$$

e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=-r^2 2\dot{\phi} \tag{12.13}$$

A partir da qual:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=-2r\dot{r}2\dot{\theta}-r^2 2\ddot{\theta} \tag{12.14}$$

Subtraindo: eq.(12.14)-eq.(12.12) = 0, obtém-se a equação θ:

$$\ddot{\theta}+\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}-sin(\theta)cos(\theta)\dot{\phi}^2=0 \tag{12.15}$$

e finalmente, a partir da eq.(12.14d) e da eq.(12.3):

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \tag{12.16}$$

e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=-2r^2sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 \tag{12.17}$$

Mas, subtraindo a derivada da eq.(12.17) - eq.(12.16) obtém-se:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)=0\rightarrow -2r^2sin^2(\theta)\dot{\phi}=h. \tag{12.18}$$

onde h é uma constante. Vamos coletar todas as equações que obtivemos acima:

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}=E \tag{12.19}$$

$$\frac{\ddot{r}}{(1-2m/r)}+\frac{m}{r^2}\dot{t}^2-\frac{(m/r^2)\dot{r}^2}{(1-2m/r)^2}-r\dot{\theta}^2-rsin^2(\theta)\dot{\phi}^2=0 \tag{12.20}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}-sin(\theta)cos(\theta)\dot{\phi}^2=0 \tag{12.21}$$

$$-r^2sin^2(\theta)\dot{\phi}=h \tag{12.22}$$

Estas equações parecem muito confusas para serem resolvidas, mas visto que o Buraco Negro é esférico, algumas simetrias geométricas podem ser aplicadas sem perda de generalidade.

12.2 Simplificando as equações usando simetria

Aqui: E e h são constantes de movimento. Antes de tentar resolver as equações, vamos verificar se é possível simplificá-las usando simetrias.

Note que, devido à simetria esférica, pode-se escolher $\theta=\frac{\pi}{2}$, a partir do que as eqs.(12.19-22) se reduzem a:

$$\begin{cases} \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}=E \\ \frac{\ddot{r}}{(1-2m/r)}+\frac{m}{r^2}\dot{t}^2-\frac{(m/r^2)\dot{r}^2}{(1-2m/r)^2}-r\dot{\phi}^2=0 \\ r^2\dot{\phi}=h \end{cases} \tag{12.23}$$

Onde foi absorvido o sinal na definição de h. Note que a eq.(12.21) desaparece. O movimento é inteiramente contido em um plano orbital com $\theta=cte$ devido à conservação do momento angular, logo, a escolha: $\theta=\pi/2$ não é perda de generalidade.

12.3 Analisando e resolvendo as equações de movimento

Nas unidades físicas o elemento de linha é dado por:

$$ds^2=c^2d\tau^2=g_{ab}dX^adX^b \tag{12.24}$$

onde: $a,b=0,1,2,3$.

Dividindo por $d\tau^2$:

$$c^2 = g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b \tag{12.25}$$

para geodésicas não-nulas, e:

$$0 = g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b \tag{12.26}$$

para geodésicas nulas.
Vamos prosseguir os cálculos em unidades naturais onde $c = 1$ e escrever:

$$g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b = 1 \tag{12.27}$$
$$g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b = 0 \tag{12.28}$$

respectivamente, para geodésicas nulas e não nulas.

12.4 Significado físico de E e h

O momento de uma partícula é dado pelo 4-vetor:

$$p^a = \mu\dot{X}^a \tag{12.29}$$

Vamos escolher unidades onde $\mu = 1$, então:

$$p^a = \dot{X}^a \tag{12.30}$$

A componente p_0 é obtida abaixando o índice, usando a métrica de Schwarzschild:

$$p_0 = g_{0a}p^a = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{X}^0 = E \tag{12.31}$$

usando a eq.(12.23a).
Agora, calcule a 3-componente:

$$p_3 = g_{3a}p^a = g_{33}\dot{\phi} \tag{12.32}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos: $g_{33} = -r^2$, portanto:

$$p_3 = -r^2\dot{\phi} = -h \tag{12.33}$$

As componentes acima são definidas no formalismo Lagrangeano como:

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \tag{12.34}$$

e

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{12.35}$$

Sabe-se que essas quantidades são conservedas pois a Lagrangeana não possui dependência explíita em t e ϕ, logo a **energia e momento angular** da partícula são conservedos conforme ela se move sobre a geodésica.

Energia da partícula E

A partícula em órbita tem energia dada por:

$$E = \vec{p}.\vec{U} = p_a U^a \tag{12.36}$$

medida por um observador com 4-velocidade U^a em um referencial inercial.

Se o observador estiver em repouso: $U^a = (1, \vec{0})$ então:

$$E = p_a.(1, \vec{0}) = p_0 \tag{12.37}$$

Portanto, a constante na eq.(12.23a) é a energia total da partícula orbitando a fonte de gravidade nesta métrica.

Em outras unidades pode-se escrever:

$$p_0 = E \to \frac{E}{c^2} \to \frac{E}{\mu_0 c^2} \tag{12.38}$$

Momento angular da partícula h

Finalmente, a 3-componente é o momento angular específico:

$$p_3 = -r^2 \dot{\phi} = -h \tag{12.39}$$

e

$$h = L \to \frac{L}{\mu_0} \to \frac{L}{\mu_0 c^2} \tag{12.40}$$

é o **momento angular por unidade de massa**.

12.5 A simetria esférica permite simplificações

A fonte de gravidade tem alta simetria angular, desta forma, usemos este fato para simplificar as equações de movimento. Um corpo estático e esférico tem simetria em θ, logo, para: $\theta = \frac{\pi}{2}$ pode-se escrever o elemento de linha como:

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2\dot{\phi}^2 \tag{12.41}$$

Mas, $\dot{\phi}^2 = \frac{h^2}{r^4}$ and $\dot{t}^2 = E^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2}$.
Inserindo as relações acima, pode-se simplificar a eq.(11.41):

$$1 = \frac{E^2}{(1 - \frac{2m}{r})} - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{h^2}{r^2} \tag{12.42}$$

Um pouco de manipulação algébrica permite-nos escrevê-la como:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r} = E^2 - 1 \tag{12.43}$$

onde E é adimensional.
Ao se recuperarem as **unidades físicas** pode-se escrever:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{c^2 r_s}{r} = c^2\left[\left(\frac{E}{\mu_0 c^2}\right)^2 - 1\right] = c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.44}$$

Aqui se define: $E = k\mu_0 c^2$ ou se E é adimensional, escreva-o $E = k$ simplesmente. Seja cuidadoso, quando mudamos as unidades, $\dot{r}$ e h devem mudar de acordo.

Uma partícula em repouso e em $r = \infty$ satisfaz: $E = \mu_0 c^2$. Verifique:

$$0 = \left(\frac{E}{\mu_0 c^2}\right)^2 - 1 \rightarrow E = \mu_0 c^2 \tag{12.45}$$

como deve ser (isto corresponde a $k = 1$).

A eq.(12.44) descreve o movimento radial de uma partícula na presença de uma massa central em $r = 0$. Vamos deduzir a dependência angular usando a variável ϕ, para obter o conjunto completo de equações que irão descrever as órbitas (e sua estabilidade).

12.6 Movimento Angular

O momento angular da partícula é conservado: $r^2\dot{\phi} = h$.

Ainda temos a relação:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2} \tag{12.46}$$

Ao inserí-la em:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{r_s}{r} = c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.47}$$

obtém-se:

$$\left[\frac{dr}{d\phi}\frac{h}{r^2}\right]^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{r_s}{r} = c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.48}$$

Agora, podemos usar a mudança de variáveis:

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\phi}\right) \tag{12.49}$$

Portanto:

$$\left[\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{1}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\phi}\right)\right]^2 \tag{12.50}$$

Inserindo na eq.(12.48) acima, obtém-e:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{h^2}\left(k^2 - 1\right) + \frac{2GM}{c^2}u^3 + \frac{2GM}{h^2}u \tag{12.51}$$

onde: $u = \frac{1}{r}$.

Agora, pode-se derivar ambos os termos da eq.(12.51) relativo a: ϕ:

$$\frac{d}{d\phi}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right] = 2\frac{du}{d\phi}\left[\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right] \tag{12.52}$$

onde o lado direito é:

$$= \left[\frac{2GM}{h^2} + \frac{2GM}{c^2}3u^2\right]\frac{du}{d\phi} \tag{12.53}$$

uma vez que eles são iguais, obtém-se:

$$\left[\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right] = \left[\frac{GM}{h^2} + \frac{GM}{c^2}3u^2\right] \tag{12.54}$$

Portanto, podemos escrever a **Equação Orbital de Movimento em Relatividade Geral** com:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3}{2}r_g u^2 \tag{12.55}$$

A **Equação Orbital de Movimento na Gravidade de Newton** é descrita por uma equação semelhante:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{12.56}$$

A única diferença está no último termo! A presença de:

$$\frac{3}{2}r_g u^2 \tag{12.57}$$

deve-se à curvatura do espaço-tempo! Não existe este termo na teoria de Newton, visto que o espaço-tempo é plano (nesta teoria).Eeste termo causa uma instabilidade: órbitas circulares estáveis existem apenas quando $r > \frac{3}{2}r_g$. Qualquer órbita dentro deste raio será necessariamente instável.

Inserindo $u = \frac{1}{r}$ pode-se expressar a eq.(12.56) como:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + \left(\frac{3r_g}{2r}\right)\frac{1}{r}$$

ou:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} - \left(\frac{3r_g}{2r}\right)\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}$$

Nota-se que no limite: $r >> \frac{3r_g}{2}$, recupera-se a aproximação Newtoniana, como deveria ser. Isto mostra que a curvatura do espaço-tempo é muito relevante quando $0 < r < \frac{3r_g}{2}$ e um novo comportamento orbital deve surgir neste intervalo.

Iremos mostrar essas novas características estudando o potencial efetivo na nova geometria.

12.7 Movimento radial de partículas com massa

Para descobrirmos algumas propriedades do espaço-tempo em torno de um Buraco Negro, precisamos estudar o movimento de partículas de teste. Podemos escolher dois movimentos em particular: radial e circular. Vamos escolher o primeiro.

Se o movimento é radial, não há **momento angular**, logo:

$$\dot{\phi} = 0 \rightarrow h = 0 \tag{12.58}$$

e a eq.(12.47) torna-se:

$$\dot{r}^2 = \frac{2Gm}{r} + c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.59}$$

Diferencie em τ para obter:

$$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{2Gm}{r^2}\dot{r} \tag{12.60}$$

cancelando $\dot{r}$ em ambos os termos obtém-se:

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} \tag{12.61}$$

a segunda derivada está relacionada ao tempo-próprio e r é uma coordenada radial (mas não é a distância física).

Suponha que um observador em $r = R$ vê uma partícula que é largada do repouso. A equação de movimento radial se torna:

$$c^2\left(k^2 - 1\right) = -\frac{2Gm}{R} \tag{12.62}$$

Logo, a equação (para qualquer r) é:

$$\dot{r}^2 = 2Gm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{12.63}$$

se $R = \infty$ então $k = 1$, e as eqs:(12.23) e (12.63) se tornam:

$$\dot{r}^2 = \frac{2Gm}{r} \tag{12.64a}$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = 1 \tag{12.64b}$$

Pode-se escrevê-la como:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \tag{12.65a}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2Gm}{r}} = -c\sqrt{\frac{r_g}{r}} \tag{12.65b}$$

4-Velocidade:

As componentes 4-vetor velocidade são:

$$U^a = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, 0, 0\right) \tag{12.66}$$

os últimos termos são nulos, pois o movimento da partícula é radial.
Logo, a 4-velocidade é dada por:

$$U^a = \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, -c\sqrt{\frac{r_g}{r}}, 0, 0\right] \tag{12.67}$$

como medido no referencial local. O sinal menos na segunda componente significa que a partícula se aproxima da origem.

Conforme $r \to r_g$ a segunda componente tende à velocida da luz!

A velocidade da partícula tende à velocidade da luz conforme ela se aproxima do horizonte de eventos, como visto por um observador próximo a este. Este resultado é completamente diferente como visto por um observador remotamente afastado.

Pode-se resolver a eq.(12.65b) para deduzir o **tempo próprio** para esta partícula alcançar r quando ela é largada de r_0 em repouso. É suficiente resolver:

$$\int_{r_0}^{r} dr\sqrt{\frac{r}{r_g}} = -c\int_0^{\tau} d\tau \tag{12.68}$$

Resolvendo-a gera-se a solução:

$$\tau = \frac{2}{c\sqrt{r_s}}\left({r_0}^{3/2} - r^{3/2}\right) \tag{12.69}$$

Logo, o tempo próprio para atingir $r = 0$ é finito (como medido pela partícula):

$$\tau = \frac{2r_0^{3/2}}{c\sqrt{r_g}} \tag{12.70}$$

Agora, é muito fácil calculá-lo quando visto por um observador remoto. Use a regra da cadeia para escrever:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -c\sqrt{\frac{r_g}{r}}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \tag{12.71}$$

Isto é muito interessante: como visto por um observador remoto, conforme a partícula se aproxima do horizonte de eventos, sua velocidade reduz a zero!

Ela congela na superfície. Este efeito é causado pela curvatura do espaço-tempo, ou em outros termos: a dilatação gravtiacional do tempo.

Vamos calcular o tempo de queda livre, de acordo com o observador remoto. Devemos resolver a equação:

$$\frac{dr}{dt} = -c\sqrt{\frac{r_g}{r}}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \tag{12.72}$$

Integre de r_0 até: r:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{\frac{r}{r_g}}dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = -c\int_0^t dt = -ct \tag{12.73}$$

Pode-se mudar a variável como: $x = \frac{r}{r_g}$ transformando a integral em:

$$r_g \int \frac{x^{3/2}dx}{(x-1)} \tag{12.74}$$

Ao resolver a integral acima, usando tabelas ou o computador teremos:

$$\int \frac{x^{3/2}dx}{(x-1)} = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) \tag{12.75}$$

Aplicando-se a eq.(12.75) na eq.(12.73) acima e dividindo-se por c obtém-se t:

$$t(r) = \frac{2r_g}{3c}\left[\left(\frac{r_0}{r_g}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} + 3\sqrt{\frac{r_0}{r_g}} - 3\sqrt{\frac{r}{r_g}} - \frac{3}{2}ln\left(F_1(r)F_2(r)\right)\right] \tag{12.76}$$

com $F_1(r) = \frac{(\sqrt{\frac{r}{r_g}}-1)}{(\sqrt{\frac{r}{r_g}}+1)}$ e $F_2(r) = \frac{(\sqrt{\frac{r_0}{r_g}}+1)}{(\sqrt{\frac{r_0}{r_s}}-1)}$.
claramente, no limite $r \to r_g$:

$$\lim_{r \to r_g} t(r) = +\infty \tag{12.77}$$

a dilatação gravitacional do tempo ataca novamente!
Vamos comparar as eqs.(12.76) e (12.70), inserindo alguns números.

$$t(r) = \frac{2r_g}{3c}\left[\left(\frac{r_0}{r_g}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} + 3\sqrt{\frac{r_0}{r_g}} - 3\sqrt{\frac{r}{r_g}} - \frac{3}{2}ln\left(F_1(r)F_2(r)\right)\right]$$

$$\tau = \frac{2r_0^{3/2}}{c\sqrt{r_g}}$$

A primeira expressão pode ser simplificada para (quando $r \sim r_g$):

$$t(r) \sim \frac{2r_0^{3/2}}{c\sqrt{r_g}} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_g}{r_0} \right)^{3/2} ln \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_g}} - 1} \right) \right]$$

$$\tau = \frac{2r_0^{3/2}}{c\sqrt{r_g}}$$

Podemos desenhar um gráfico comparando o comportamento das funções:

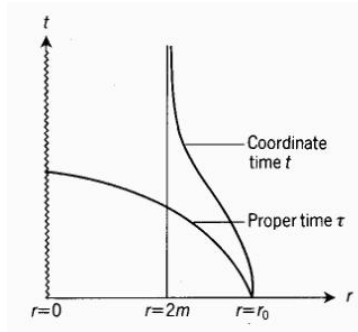



Figure 12.1: comparação entre os tempos próprio e aparente

A figura acima compara os dois tempos: como visto pelo observador remoto e o tempo prṕrio. É óbvio que o tempo próprio para ele atingir a singularidade é finito, mas qual é o velor do tempo aparente (correspondente a esta queda)? À primeira vista, podemos imaginar que o observador remoto vê o intrépido congelar no horizonte de eventos. Mas, estamos esquecendo um detalhe: conforme o observador intrépido cai, ele emite luz, e esta luz vai perdendo energia para o campo gravitacional. Conforme ele se aproxima do Buraco Negro, a radiação que o observador remoto recebe, terá um comprimento de onda cada vez mais longo, correspondendo a fótons de energia cada vez menor.

Em um intervalo de tempo muito finito, a intensidade da luz cai para valores extremamente baixos, e neste momento, ele perde a visibilidade do observador que caiu no Buraco Negro. Na verdade, a luminosidade cai exponencialmente.

12.8 Movimento Circular

Vamos estudar o movimento quando $r = cte$. Portanto, considere:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{12.78}$$

onde: $u = \frac{1}{r}$.

Ao escolhermos uma órbita circular: $r = cte$. então $u = cte$ e:

$$u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{12.79}$$

Use a expressão conhecida: $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, a partir da qual pode-se escrever:

$$u = \frac{r_g^2 c^2}{2h^2} + \frac{3}{2} r_g u^2 \tag{12.80}$$

Resolvendo-a para h:

$$h^2 = \frac{r_g c^2}{(2r - 3r_g)} r^2 \tag{12.81}$$

Agora, de volta à equação radial, onde: $\dot{r} = 0$ temos:

$$\frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{r_g c^2}{r} = c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.82}$$

Inserindo a eq.(12.81) em (12.82) obtemos:

$$\frac{r_g c^2}{(2r - 3r_g)}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{r_g c^2}{r} = c^2\left(k^2 - 1\right) \tag{12.83}$$

uma simples manipulção algébrica leva a:

$$k^2 = 1 + \frac{2r_g^2 - r r_s}{r(2r - 3r_g)} \tag{12.84}$$

podemos simplificá-la em:

$$k = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}}} \tag{12.85}$$

Mas, lembre-se de que: $k = \frac{E}{m_0 c^2}$, onde E descreve a energia relativística total da partícula.

Portanto, obtemos o resultado:

$$E = m_0c^2 \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}}} \tag{12.86}$$

para a energia de uma partícula em uma órbita circular.

Vamos analisar alguns vínculos (desde que r é variável). Note que existe uma raiz quadrada no denominador. A raiz existe somente quando o seu argumento é positivo, então:

$$1 - \frac{3r_g}{2r} > 0 \rightarrow r > \frac{3r_g}{2} \tag{12.87}$$

como resultado não existe órbita circular para raio menor que: $\frac{3r_g}{2}$. Isto é consequência da forte curvatura do espaço-tempo quando nos aproximamos do horizonte de eventos do Buraco Negro.

Agora, devemos analisar a existência de órbitas circulares que são ligadas. Para isto, $E < m_0c^2$.

Se analisarmos a função dada pela eq.(12.86) nós podemos desenhar o gráfico abaixo:

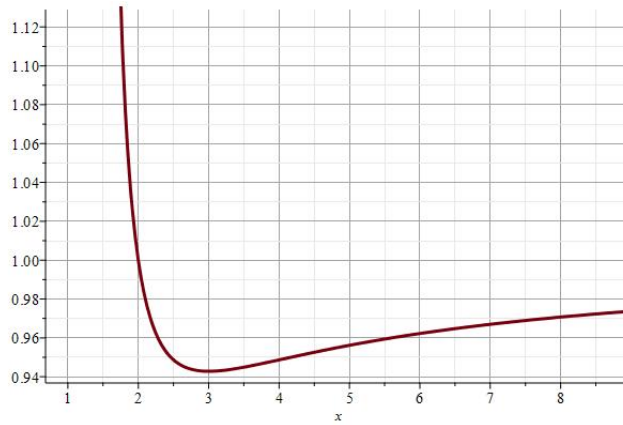



Figure 12.2: Existência das órbitas circulares

Análise

Este gráfico mostra que existem órbitas ligadas somente para: $r > 2r_g$. Note que o eixo vertical está em unidades tais que: $y = \frac{E}{m_0c^2}$.

Outro modo de visualizar esses resultados é calcular a equação:

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{12.88}$$

note que vale a seguinte relação para h:

$$h^2 = \frac{r_g}{2} \frac{c^2 r^2}{\left(r - \frac{3r_g}{2}\right)} \tag{12.89}$$

Portanto, ao inserí-la na eq.(146)acima, obtém-se:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{c^2}{r^2} \frac{r_g/2}{(r - 3r_g/2)} \tag{12.90}$$

esta quantidade é positiva apenas se: $r > 3r_g/2$.

Isto significa que não existe qualquer geodésica (e movimento circular) para órbitas onde: $r < 3r_g/2$ independente do valor de h! Isto é surpreendente, e diferente da Mecânica de Newton onde pode-se ajustar o valor do momento angular para se obter uma órbita circular.

Finalmente, vamos calculá-lo em termos de t:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2 \tag{12.91}$$

Mas, por outro lado:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \tag{12.92}$$

e $k^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2}{\left(1 - \frac{3r_g}{2r}\right)}$.

A eq.(12.91) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3} k^2 \tag{12.93}$$

mas $k^2 = 1$ para órbita circular, desta forma podemos simplificar a expressão acima como:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3} \tag{12.94}$$

Observe que isto é semelhante ao caso Newtoniano, mas r é a coordenada radial (não confunda com a distância física). Em um período, uma partícula corre $2\pi r$ como deve ser.

Chapter 13

A estabilidade das órbitas circulares

13.1 Potencial Newtoniano

A análise acima parece sugerir que a órbita circular ligada mais fechada em torno de um corpo esférico é: $r = 2r_g$. Entretanto, ainda não determinamos se esta órbita é estável ou não. Na dinâmica Newtoniana a equação de movimento de uma partícula em um potencial central pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{eff}(r) = E \\ \text{where: } V_{eff}(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \end{cases} \tag{13.1}$$

Ao desenharmos o **potencial efetivo** para a função acima obtemos:

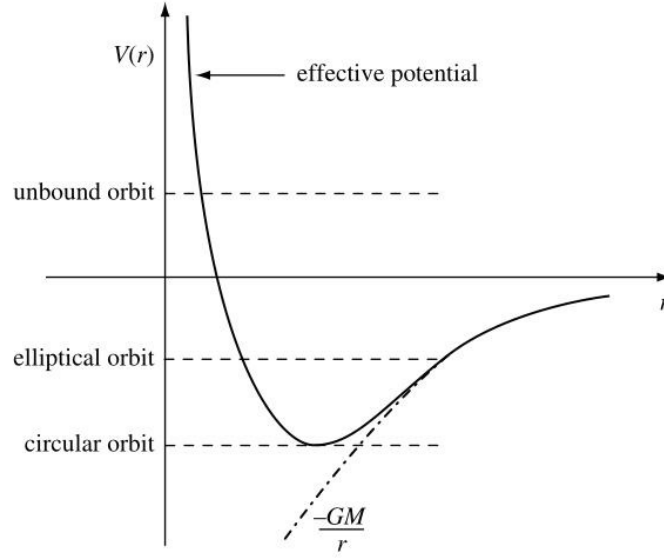



Figure 13.1: potencial efetivo na Mecânica de Newton

A **condição de estabilidade** para uma órbita circular é:

$$
\begin{aligned}
V'_{eff}(r = R) &= 0 \\
V''_{eff}(r = R) &> 0
\end{aligned}
\tag{13.2}
$$

onde R é o raio da órbita circular $E = V_{eff}(R)$. Da figura acima vemos que para $E > 0$ não temos órbitas fechadas, elas são hipérboles e para $E > V_{eff}$ as órbitas são elipses (leis de Kepler).

A condição de estabilidade é a mesma em Relatividade Geral, mas visto que o formato do potencial efetivo é diferente, não há órbitas circulares estáveis para $r < 3M$ (na Mecânica Newtoniana não há nenhum problema aqui). Em ambos os casos, a conservação do momento angular implica que as órbitas podem estar contidas em um plano, o plano orbital.

13.2 Caso Relativístico

Em Relatividade Geral a equação orbital na métrica de Schwarzschild's é dada por:

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{h^2}{2r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{c^2 r_g}{2r} = \frac{c^2}{2}\left(k^2 - 1\right) \tag{13.3}
$$

A partir desta expressão, o potencial efetivo em Relatividade Geral é:

$$V_{eff}(r)_{GR} = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{h^2 GM}{c^2 r^3} \tag{13.4}$$

Observe que existe um novo termo (o terceiro), muito relevante quando a partícula se move muito próximo da massa central ($r \sim r_s$). Isto representa um efeito de curvatura que não está prsente na teoria Newtoniana.

No limite: $c \to \infty$ recupera-se o potencial Newtoniano:

$$\lim_{c \to +\infty} V_{eff}(r)_{GR} = V_{eff}(r)_N \tag{13.5}$$

Para desenhar alguns gráficos, é conveniente expressá-lo em termos adimensionais:

$$V_{eff}(x) = -\frac{2}{x} + \frac{H^2}{x^2} - \frac{H^2}{x^3} \tag{13.6}$$

com: $H^2 = \frac{h^2}{2r_g^2}$, $c = 1$ e $x = \frac{r}{r_g}$.

Podemos plotá-lo para diversos valores do momento angular H, no Maple 2016:

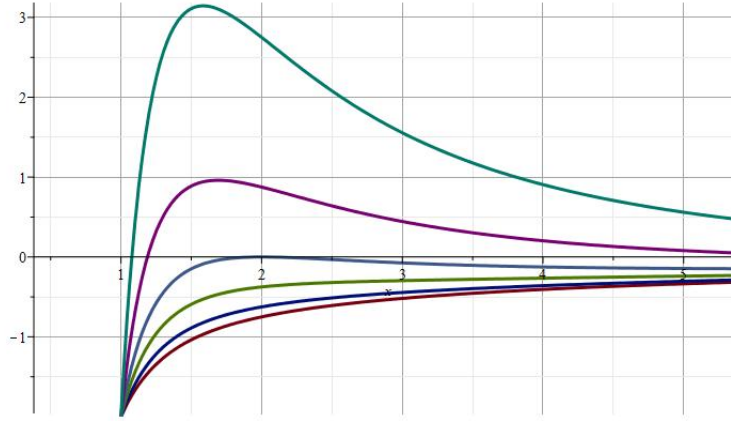



Figure 13.2: potencial efetivo na geometria de Schwarzschild

Análise:

É muito conveniente expressar o potencial em termos de $\mu = \frac{GM}{r}$. Escreva a eq.(13.4) como:

$$V_{eff}(r) = -\frac{\mu c^2}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{h^2 \mu}{r^3} \tag{13.7}$$

Tomando a primeira derivada acima, e igualando a zero, obtém-se:

$$V_{eff}^{'}(r) = \frac{\mu c^2}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + 3\frac{h^2\mu}{r^4} = 0 \tag{13.8}$$

Resolva-a como uma equação de segundo grau em: r:

$$r = \frac{h^2}{2\mu c^2}\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{12\mu^2 c^2}{h^2}\right)}\right] \tag{13.9}$$

Mas, o argumento dentro da raiz quadrada deve ser positivo, logo:

$$\left(1 - \frac{12\mu^2 c^2}{h^2}\right) > 0 \rightarrow h^2 > 12\mu c^2 \tag{13.10}$$

Na condição marginal, temos: $h = 12\mu c^2$ e este resultado gera:

$$r_{min} = \frac{h^2}{2\mu c^2} = 6\mu = 3r_g \tag{13.11}$$

Isto significa que não há órbita circular estável para $r < 3r_g$, mesmo se h é muito grande!

Este resultado contrasta fortemente com a Mecânica Newtoniana, onde órbitas circulares ocorrem para qualquer valor de r se houver momento angular suficiente. Observe que a curva do potencial é invertida, o que implica que existem órbitas circulares estáveis para pequenos valores de r.

Tal resultado tem implicações astrofísicas: discos de acréscimo são formados em torno de Buracos Negros, e consistem de gás e poeira com algum momento angular relativo ao centro. A frição causa perda de momento angular e o gás é sugado pelo campo gravitacional do Buraco Negro.

Adicionalmente, a intensa fricção aquece o gás a milhões de graus Kelvin, e o mesmo pode emitir em raios X. Mas qual é o ganho no processo? Lembre-se de que:

$$k = \frac{1 - 2\mu/r}{\sqrt{1 - \mu/r}} \tag{13.12}$$

Se $r = 6\mu$ então:

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{E}{m_0 c^2} \tag{13.13}$$

Mas este valor é a energia potencial gravitacional da partícula, portanto, a diferença foi convertida em calor.

$$\frac{\Delta E}{m_0 c^2} = 1 - 0.943 \sim 0.057 = 5.7\% \tag{13.14}$$

De fato, quase 6% foi convertido em calor.

O processo é muito eficiente: a conversão nuclear é capaz de converter quase 0.7% da energia inicial em calor.

Para um raio abaixo da última órbita estável mais interna, o gás não tem órbitas circulares e ele espirala em direção ao Buraco Negro, aumentando a sua massa!

Discos de acréscimo são portanto capazes de converter energia de repouso em radiação com uma eficiência 10 vezes maior do que a eficiência da queima nuclear do hidrogênio!

O acréscimo de matéria em objetos compactos dá origem aos fenômenos mais energéticos do Universo (depois do Big Bang) e tais eventos podem ser mensuráveis por satélites e outros instrumentos em Terra.

Chapter 14

Movimento da Luz

14.1 Movimento Radial

Nesta seção iremos calcular as equações de movimento na presença de um corpo massivo estático, de acordo com a métrica de Schwarzschild. A trajetória da luz é uma geodésica nula: $ds^2 = 0$.

Não podemos usar o tempo-próprio τ como um parâmetro, assim, iremos usar algum **parâmetro afim** λ ao longo da geodésica. Considerando o movimento no plano equatorial, as equações de movimento são dadas pelas equações geodésicas:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = K \tag{14.1a}$$

$$c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0 \tag{14.1b}$$

$$r^2\dot{\phi} = h \tag{14.1c}$$

Para a luz, a equação de energia pode ser obtida substituindo a eq.(14.1a) e a eq.(14.1c) na eq.(14.1b), o que fornece:

$$\dot{r}^2 + \frac{h}{r^2}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) = c^2K^2 \tag{14.2}$$

De modo semelhante, o análogo para os fótons é a equação de formato:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{14.3}$$

é obtida substituindo $h = r^2\dot{\Phi}$ na eq.(14.1b) mais a regra da cadeia:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \tag{14.4}$$

Realizando a substituição: $u = \frac{1}{r}$ e derivando com relação a λ obtém-se:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{14.5}$$

Agora, estamos prontos para analisar dois casos: movimento radial a circular.

Movimento Radial:

Neste caso: $\dot{\Phi} = 0$ e isto reduz a eq.(14.1b) para:

$$c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0 \tag{14.6}$$

ou em outra forma:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \tag{14.7}$$

A equação acima tem as soluções:

$$ct = r + 2\mu ln|\frac{r}{2\mu} - 1| + C \tag{14.8a}$$

$$ct = -r - 2\mu ln|\frac{r}{2\mu} - 1| + C \tag{14.8b}$$

Sob $t \to -t$ a trajetória incidente torna-se uma emergente.

A figura seguinte mostra o caminho da luz na presença de um Buraco Negro em $r = 0$.

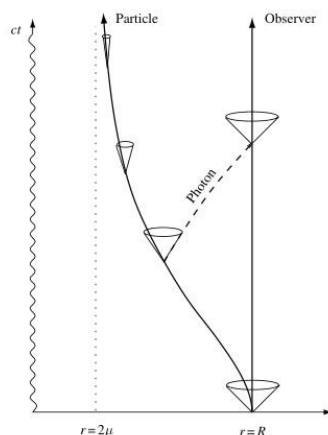



Figure 14.1: o caminho do raio de luz emitido por um observador em r

A figura é muito interessante: a trajetória da luz para um observador distante é mais aberta. Entretanto, próximo do Buraco Negro, o cone de luz é mais fechado, e a trajetória do raio de luz deve se submeter a esta modificação.

No horizonte de eventos o cone de luz é nulo, então o horizonte é uma superfície nula (vetores tangentes são nulos na superfície). A figura mostra que o intervalo de tempo para alcançar o horizonte, medido por um observador remoto, é infinito.

Entretanto, o tempo próprio desta queda (o intervalo de tempo medido pelo intrépido observador que cai no Buraco Negro) é finito. Adicionalmente, os sinais de luz (recebidos pelo observador remoto) são avermelhados e perdem intensidade, muito rapidamente, e o observador afastado perde o seu amigo de vista.

14.2 Movimento Circular

Para movimento circular nós temos: $r = cte$. Então, a partir da equação do formato eq.(14.5), vemos que o único raio possível, para uma órbita circular do fóton é (considere $r = cte$):

$$r = \frac{3GM}{c^2} = 3M \tag{14.9}$$

Pode-se verificar que esta órbita é instável (ela é conhecida como a órbit circular interna mais estável: ISCO). As únicas órbitas circulares estáveis aparecem para $r > 6M$ e para $3M < r < 6M$ as órbitas circulares são instáveis.

A equação de energia para um fóton é dada por:

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{eff}(r) = \frac{1}{b^2} \tag{14.10}$$

onde: $b = \frac{h}{cK}$ e $V_{eff}(r)$ é o potencial efetivo:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \tag{14.11}$$

Como pode ser visto: $V_{eff}(r)$ tem máximo em $r = 3\mu$ onde: $V_{eff}(r) = \frac{1}{27\mu^2}$. Uma vez que: $V''_{eff}(r = 3\mu) < 0$ isto implica que a órbita circular com este raio, é instável.

A dependência da função $V_{eff}(r)$ em termos de r mostra que não existe órbita circular estável (usamos: $\mu = M$).

Finalmente, uma **órbita geral** (um fóton que vem do infinito) pode ser descrita pela equação:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\right]^{-1/2} \tag{14.12}$$

A órbita do fóton é determinada pelo valor da constante b (parâmetro de impacto). Para encontrar o significado físico de b, começamos usando a eq.914.1c) e a equação de energia (14.1a) para escrever:

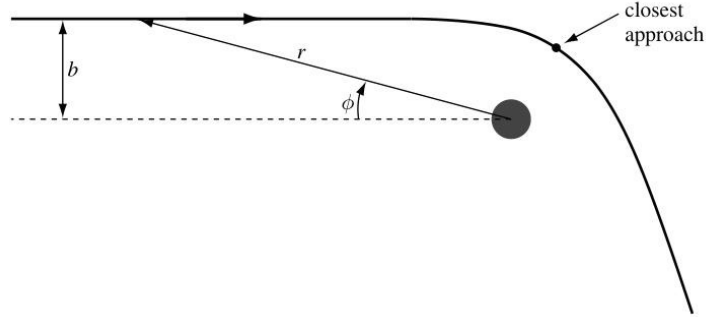



Figure 14.2: o encurvamento da luz

Para um fóton vindo do infinito, temos: $r^2\frac{d\phi}{dr} = \pm b$. Desde que: $\phi(r) \to 0$ conforme $r \to \infty$, a solução é:$r(\phi) = \pm\frac{b}{sin(\phi)}$, onde b é o parâmetro de impacto. Adicionalmente, o **encurvamento da luz** é um caso particular.

Chapter 15

Usando o Maple em Relatividade

15.1 Introdução ao Maple

O formalismo dos **Tensores em Variedades** é um ingrediente necessário para fazer física, mas a experiência mostra que as ferramentas computacionais são lugar comum para fazer a pesquisa. Muitos cálculos são tediosos e propensos a erros, e nossa intuição deve guiar a física.

Além disso, é muito fácil construir um cenário onde cálculos manuais são impossíveis, por exemplo: geração de ondas gravitacionais devido à colisão de dois Buracos Negros.

Neste caso, faz-se necessário o uso de simulação numérica, usando supercomputadores.

15.2 Usando o Pacote *Differential Geometry*

Com o objetivo de usar as características mais robustas do Maple, devemos carregar alguns pacotes. Os pacotes os mais úteis são: Física, e Geometria Diferencial. Aqui, nós carregamos estes pacotes no começo de uma seção do Maple.

Um pacote é carregado usando-se a sintaxe: *with(packageName)*; e pressionando a tecla ENTER. A figura abaixo mostra como carregar esses pacotes:

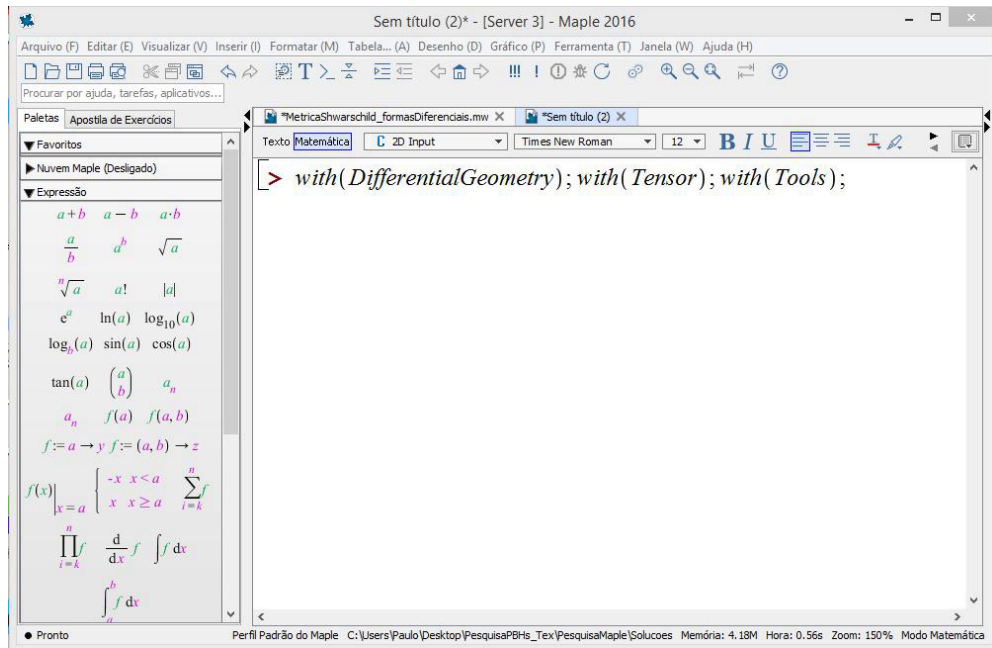



Figure 15.1: carregando três pacotes

Agora, o próximo passo é definir a **variedade**, seu nome e as coordenadas a serem usadas. Usaremos o comando: *DGsetup(coordenadas, nome da variedade, verbose);*.

A figura a seguir mostra o uso de uma variedade M1, com coordenadas esféricas:

```
> DGsetup([t, r, theta, phi], M1, verbose);
```

The following coordinates have been protected:

$[t, r, \theta, \phi]$

The following vector fields have been defined and protected:

[D_t, D_r, D_theta, D_phi]

The following differential 1-forms have been defined and protected:

[dt, dr, dtheta, dphi]

frame name: M1 **(1)**

```
M1 >
```

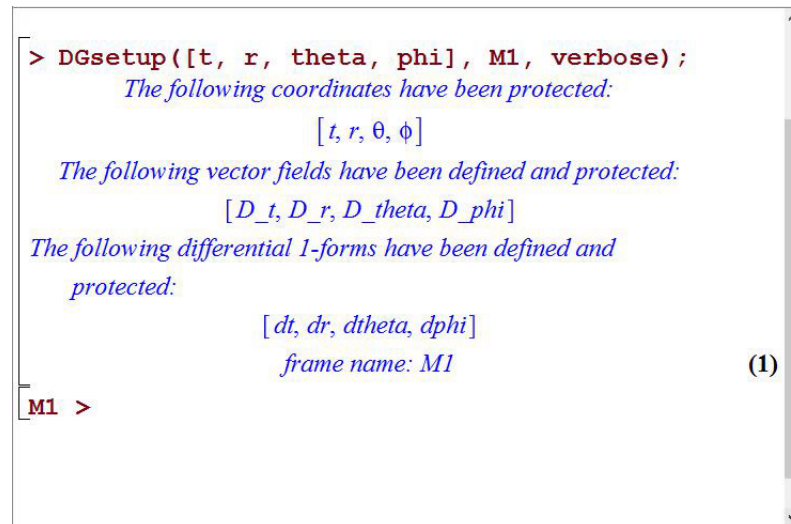



Figure 15.2: definindo a variedade M1

A saída do Maple informa: $[t, r, \theta, \phi]$ são as coordenadas, os vetores da base e_a e a base das 1-formas Θ^a são:

$$\begin{aligned} \{e_a\} &= \{Dt, Dr, D\theta, D\phi\} \\ \{\Theta^a\} &= \{dt, dr, d\theta, d\phi\} \end{aligned} \tag{15.1}$$

A variedade é identificada por M1. Em seguida, a linha M1¿ espera novas operações a serem definidas.

O ponto de partida mais importante é definido aqui: devemos definir a métrica. A métrica é um objeto geométrico, um tensor covariante. Logo, ele é uma combinação linear de elementos básicos: as 1-formas: $\{\Theta^a\}$. Deve-se escrever:

$$g = g_{ab}\Theta^a \otimes \Theta^b \tag{15.2}$$

Escolhe-se um elemento de linha diagonal definido pelos coeficientes $A(r)$ e $B(r)$ tais que:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{15.3}$$

Mas, devemos saber como o Maple compreende o símbolo $\otimes$ como produto tensorial. Para isto, o Maple usa: $\&t$ e $*$.

O comando para carregar o elemento de linha como o correto objeto geométrico na base $\{\Theta\}$ é: *evalDG( )*. Aqui nós escolhemos g como nome do tensor métrico, mas isto é arbitrário.

A figura abaixo mostra a sintaxe completa:

```
M1 > g := evalDG( -A(r) * dt &t dt + (B(r)) * dr &t dr + r^2 * (dtheta &t dtheta + sin(θ)^2 * dphi
        &t dphi));
        g := -((A(r) dt) dt) + (B(r) dr) dr + (r^2 dtheta) dtheta + (r^2 sin(θ)^2 dphi) dphi
M1 >
```

Figure 15.3: definindo o elemento de linha

Estamos prontos! Agora, as ferramentas internas do pacote *Differential-Geometry* são capazes de calcular os demais objetos geométricos, a partir da métrica: tensores de Ricci, Riemann , Einstein, Weyl, etc.

O objeto geométrico g foi definido. Agora, estamos prontos para calcular o tensor de Einstein. O Maple usa: *EinsteinTensor(metric)* como sintaxe. Você deve inserir a métrica como argumento, e em nosso caso ela é g. Em seguida, escolhe-se um nome para o tensor de Einstein. Na próxima figura usamos : *Ein*, mas a escolha é sua.

Note que o Maple expande em termos da base $\{e_a\}$ mas ele providencia comandos para baixar índices.

M1 > $Ein := EinsteinTensor(g);$

$$Ein := \frac{\left(B(r)^2 + \left(\frac{d}{dr} B(r)\right) r - B(r)\right) D_t}{A(r)\, r^2\, B(r)^2} D_t - \left(\frac{\left(A(r)\, B(r) - \left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r - A(r)\right) D_r}{A(r)\, B(r)^2\, r^2} D_r\right)$$
$$- \left(\frac{1}{4\, r^3\, B(r)^2\, A(r)^2}\left(\left(A(r)\left(\frac{d}{dr} B(r)\right)\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r - 2\left(\frac{d^2}{dr^2} A(r)\right) A(r)\, B(r)\, r + B(r)\left(\frac{d}{dr} A(r)\right)^2 r + 2\left(\frac{d}{dr} B(r)\right) A(r)^2 - 2\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) B(r)\, A(r)\right) D_theta\right) D_theta\right) - \left(\frac{1}{4\, r^3\, B(r)^2\, A(r)^2 \sin(\theta)^2}\left(\left(A(r)\left(\frac{d}{dr} B(r)\right)\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) r - 2\left(\frac{d^2}{dr^2} A(r)\right) A(r)\, B(r)\, r + B(r)\left(\frac{d}{dr} A(r)\right)^2 r + 2\left(\frac{d}{dr} B(r)\right) A(r)^2 - 2\left(\frac{d}{dr} A(r)\right) B(r)\, A(r)\right) D_phi\right) D_phi\right)$$

Figure 15.4: tensor de Einstein calculado a partir do Maple

Neste momento devemos ser cuidadosos: o último termo contém $sin^2(\theta)$. Ele surge devido ao fato de que ambos índices são superiores. Devemos abaixar um deles. Vamos abaixar o segundo deles. Isto corresponde a executar:

$$G^{ab} \rightarrow G^{a}{}_{b} \tag{15.4}$$

esta operação cancela o fator geométrico, que não é físico. Usamos o comando: *RaiseLowerIndices(metric, Tensor, [1 or 2]);*

Este comando exige a métrica, o tensor e um parâmetro determinando qual índice será operado: $G^{a}{}_{b} = g_{cb} G^{ac}$.

O Maple usa uma notação invertida para os índices das bases se comparadas com as nossas definições do capítulo 2, mas é muito fácil migrar de uma para outra.

```
M1 > E := RaiseLowerIndices(g, Ein, [1]);
```

$$E := -\left(\frac{\left(B(r)^2 + \left(\frac{d}{dr}B(r)\right)r - B(r)\right)dt}{r^2 B(r)^2} D_t\right) - \left(\frac{\left(A(r)\,B(r) - \left(\frac{d}{dr}A(r)\right)r - A(r)\right)dr}{B(r)\,A(r)\,r^2} D_r\right)$$
$$-\left(\frac{1}{4\,r\,B(r)^2 A(r)^2}\left(\left(A(r)\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)r - 2\left(\frac{d^2}{dr^2}A(r)\right)A(r)\,B(r)\,r + B(r)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2 r + 2\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)A(r)^2 - 2\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)B(r)\,A(r)\right)dtheta\right)D_theta\right) - \left(\frac{1}{4\,r\,B(r)^2 A(r)^2}\left(\left(A(r)\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)r\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.- 2\left(\frac{d^2}{dr^2}A(r)\right)A(r)\,B(r)\,r + B(r)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2 r + 2\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)A(r)^2 - 2\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)B(r)\,A(r)\right)dphi\right)D_phi\right)$$

Figure 15.5: subindo o primeiro índice

Podemos extrair as componentes individuais de $G^a{}_b$, usando o comando:

```
M1 > EinEq_2 := DGinfo(E, "CoefficientSet");
```

$$EinEq_2 := \left\{-\frac{B(r)^2 + \left(\frac{d}{dr}B(r)\right)r - B(r)}{r^2 B(r)^2},\ -\frac{1}{4}\,\frac{1}{r\,B(r)^2 A(r)^2}\left(A(r)\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)r\right.\right.$$
$$\left.- 2\left(\frac{d^2}{dr^2}A(r)\right)A(r)\,B(r)\,r + B(r)\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)^2 r + 2\left(\frac{d}{dr}B(r)\right)A(r)^2 - 2\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)B(r)\,A(r)\right),$$
$$\left.-\frac{A(r)\,B(r) - \left(\frac{d}{dr}A(r)\right)r - A(r)}{B(r)\,A(r)\,r^2}\right\}$$

Figure 15.6: extraindo os coeficientes

Finalmente, obtivemos as componentes do tensor de Einstein. As equações de Einstein são lidas como:

$$G^a{}_b = -\frac{8\pi G}{c^4}T^a{}_b \tag{15.5}$$

Neste exemplo, procuramos soluções de vácuo, desta forma: $T^a{}_b = 0$. Agora, temos ums sistema de EDOs para serem resolvidas.

Vamos copiá-las e colá-las em outro grupo de execução e nomeá-las:

```
M1 > Soln := pdsolve(EinEq_2);
```

$$Soln := \left\{A(r) = \frac{(r + _C1)\ _C2}{r},\ B(r) = \frac{r}{r + _C1}\right\}$$

```
M1 >
```

Figure 15.7: extraindo os coeficientes

Vamos aplicar o limite Newtoniano. Sabe-se que: $g_{00} = -A(r)$ e

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{15.6}$$

Portanto, obtém-se:

$$\left[1 + \frac{C_1}{r}\right] C_2 = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \tag{15.7}$$

Sabemos também que: $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Faça $C_2 = 1$ e iremos obter $C_1 = -2GM$, o que nos leva a:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \tag{15.8a}$$

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} \tag{15.8b}$$

em unidades físicas, e obtivemos a métrica de Schwarzschild, de modo elegante, usando os recursos computacionais do Maple.

```
M1 > gS := subs( { _C1 = - 2 * m, _C2 = 1 }, subs(Soln, g) );
```

$$gS := -\left(\frac{(r-2\,m)\,dt}{r}\,dt\right) + \frac{r\,dr}{r-2\,m}\,dr + \left(r^2\,dtheta\right)\,dtheta + \left(r^2\sin(\theta)^2\,dphi\right)\,dphi$$

Figure 15.8: elemento de linha, finalmente

Podemos ainda expressar a métrica como uma matriz:

```
M1 > convert(convert(gS, DGArray), Matrix);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{r-2\,m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r-2\,m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Figure 15.9: g_{ab} como uma matriz

Na próxima seção iremos determinar as geodésicas para a métrica de Schwarzschild.

15.3 Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild

Podemos usar os comandos do Maple para extrair as geodésicas a partir da métrica de Schwarzschild. Abra uma nova seção no Maple:

▶ Geodesic Equations

```
> DGsetup([t, r, theta, phi], M1, verbose);
```

The following coordinates have been protected:

$[t, r, \theta, \phi]$

The following vector fields have been defined and protected:

$[D_t, D_r, D_theta, D_phi]$

The following differential 1-forms have been defined and protected:

$[dt, dr, dtheta, dphi]$

frame name: M1

Figure 15.10: carregando a variedade

Use a métrica que foi obtida na seção prévia:

M1 > $g := evalDG\left(-\left(1 - \frac{2 \cdot m}{r}\right) * dt \,\&t\, dt + \frac{1}{\left(1 - \frac{2 \cdot m}{r}\right)} * dr \,\&t\, dr + r\hat{}2 * \left(dtheta \,\&t\, dtheta + \sin(\theta)\hat{}2 * dphi \,\&t\, dphi\right)\right);$

$$g := \frac{(-r + 2\,m)\,dt}{r}\,dt - \left(\frac{r\,dr}{-r + 2\,m}\,dr\right) + \left(r^2\,dtheta\right)dtheta + \left(r^2 \sin(\theta)^2\,dphi\right)dphi$$

Figure 15.11: definindo a métrica

O próximo comando calcula os símbolos de Christoffel de primeiro tipo:

```
M1 > C3 := Christoffel(g, "FirstKind");
```

$$C3 := -\left(\left(\frac{m\,dt}{r^2}\,dt\right)dr\right) - \left(\left(\frac{m\,dt}{r^2}\,dr\right)dt\right) + \left(\frac{m\,dr}{r^2}\,dt\right)dt - \left(\left(\frac{m\,dr}{(-r+2\,m)^2}\,dr\right)dr\right)$$
$$- (((r\,dr)\,dtheta)\,dtheta) - \left(\left(\left(r\sin(\theta)^2\,dr\right)dphi\right)dphi\right) + ((r\,dtheta)\,dr)\,dtheta$$
$$+ ((r\,dtheta)\,dtheta)\,dr - \left(\left(\left(r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,dtheta\right)dphi\right)dphi\right) + \left(\left(r\sin(\theta)^2\,dphi\right)dr\right)dphi$$
$$+ \left(\left(r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,dphi\right)dtheta\right)dphi + \left(\left(r\sin(\theta)^2\,dphi\right)dphi\right)dr$$
$$+ \left(\left(r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,dphi\right)dphi\right)dtheta$$

Figure 15.12: calculando os símbolos de Christoffel

Pode-se extrair as componentes e calcular os símbolos de Christoffel de segundo tipo:

```
M1 > K3 := DGinfo(C3, "CoefficientSet");
```

$$K3 := \left\{r, \frac{m}{r^2}, r\sin(\theta)^2, r^2\sin(\theta)\cos(\theta), -r, -\frac{m}{r^2}, -\frac{m}{(-r+2\,m)^2}, -r\sin(\theta)^2, -r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right\}$$

```
M1 > C4 := Christoffel(g, "SecondKind");
```

$$C4 := -\left(\left(\frac{m\,D_t}{r\,(-r+2\,m)}\,dt\right)dr\right) - \left(\left(\frac{m\,D_t}{r\,(-r+2\,m)}\,dr\right)dt\right) - \left(\left(\frac{(-r+2\,m)\,m\,D_r}{r^3}\,dt\right)dt\right)$$
$$+ \left(\frac{m\,D_r}{r\,(-r+2\,m)}\,dr\right)dr + (((-r+2\,m)\,D_r)\,dtheta)\,dtheta + \left(\left(\left((-r\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+2\,m)\sin(\theta)^2\,D_r\right)dphi\right)dphi + \left(\frac{D_theta}{r}\,dr\right)dtheta + \left(\frac{D_theta}{r}\,dtheta\right)dr$$
$$- (((\sin(\theta)\cos(\theta)\,D_theta)\,dphi)\,dphi) + \left(\frac{D_phi}{r}\,dr\right)dphi + \left(\frac{\cos(\theta)\,D_phi}{\sin(\theta)}\,dtheta\right)dphi$$
$$+ \left(\frac{D_phi}{r}\,dphi\right)dr + \left(\frac{\cos(\theta)\,D_phi}{\sin(\theta)}\,dphi\right)dtheta$$

Figure 15.13: símbolos de Christoffel's do segundo tipo

O passo essencial é definir uma curva e sua parametrização. A curva é um conjunto de pontos cujas coordenadas dependem do parâmetro τ, e o próximo comando define esta curva contínua, no espaço-tempo:

```
M1 > C := [t(tau), r(tau), theta(tau), phi(tau)];
```

$$C := [t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau)]$$

Figure 15.14: parametrização das geodésicas

O próximo comando depende de 3 argumentos: a curva, a coneão e o parâmetro τ:

```
M1 > U := GeodesicEquations(C, Conexao, tau);
```

$$U := \left(\frac{2\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)m}{r(\tau)\,(r(\tau)-2\,m)} + \frac{d^2}{d\tau^2}\,t(\tau) \right) D_t + \frac{1}{r(\tau)^3\,(r(\tau)-2\,m)} \Bigg(\Bigg(r(\tau)^5 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 \cos(\theta(\tau))^2 - 4\,r(\tau)^4 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 \cos(\theta(\tau))^2\,m + 4\,r(\tau)^3 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 \cos(\theta(\tau))^2\,m^2 - r(\tau)^5 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 - r(\tau)^5 \left(\frac{d}{d\tau}\,\theta(\tau)\right)^2 + 4\,r(\tau)^4 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 m + 4\,r(\tau)^4 \left(\frac{d}{d\tau}\,\theta(\tau)\right)^2 m - 4\,r(\tau)^3 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 m^2 - 4\,r(\tau)^3 \left(\frac{d}{d\tau}\,\theta(\tau)\right)^2 m^2 + \left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,r(\tau)\right) r(\tau)^4 - 2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,r(\tau)\right) r(\tau)^3\,m - \left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)^2 m\,r(\tau)^2 + r(\tau)^2 \left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m - 4\,r(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m^2 + 4\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m^3 \Bigg) D_r \Bigg) + \frac{\left(-\left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 \sin(\theta(\tau))\cos(\theta(\tau))\,r(\tau) + \left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,\theta(\tau)\right) r(\tau) + 2\left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,\theta(\tau)\right)\right) D_theta}{r(\tau)} + \frac{\left(2\left(\frac{d}{d\tau}\,\theta(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)\cos(\theta(\tau))\,r(\tau) + \left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,\phi(\tau)\right)\sin(\theta(\tau))\,r(\tau) + 2\left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)\sin(\theta(\tau))\right) D_phi}{\sin(\theta(\tau))\,r(\tau)}$$

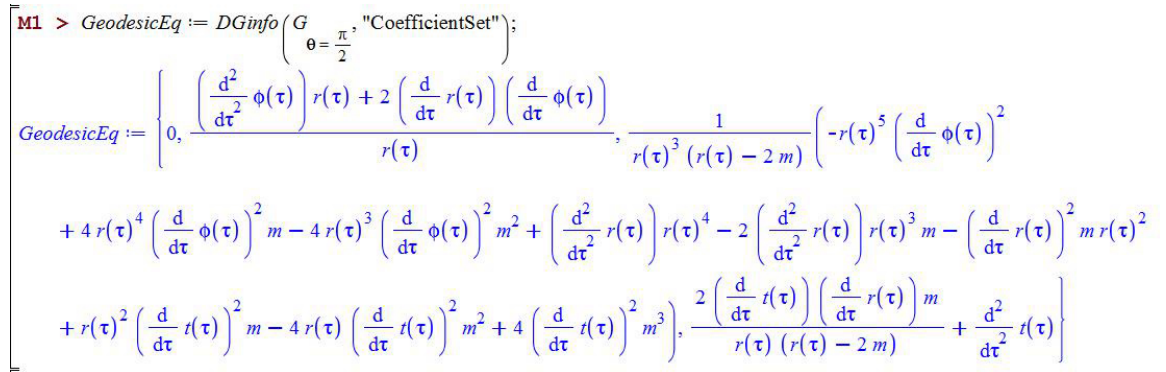



Figure 15.15: calculando as equações geodésicas

Use $\theta = \pi/2$ para simplificar:

$$\text{M1} > G_{\theta=\frac{\pi}{2}} := eval\left((9),\ \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} \right);$$

$$G_{\theta=\frac{1}{2}\pi} := \left(\frac{2\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)m}{r(\tau)\,(r(\tau)-2\,m)} + \frac{d^2}{d\tau^2}\,t(\tau) \right) D_t + \frac{1}{r(\tau)^3\,(r(\tau)-2\,m)} \Bigg(\Bigg(-r(\tau)^5 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 + 4\,r(\tau)^4 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 m - 4\,r(\tau)^3 \left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)^2 m^2 + \left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,r(\tau)\right) r(\tau)^4 - 2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,r(\tau)\right) r(\tau)^3\,m - \left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)^2 m\,r(\tau)^2 + r(\tau)^2 \left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m - 4\,r(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m^2 + 4\left(\frac{d}{d\tau}\,t(\tau)\right)^2 m^3 \Bigg) D_r \Bigg) + 0\,D_theta + \frac{\left(\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\,\phi(\tau)\right) r(\tau) + 2\left(\frac{d}{d\tau}\,r(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\,\phi(\tau)\right)\right) D_phi}{r(\tau)}$$

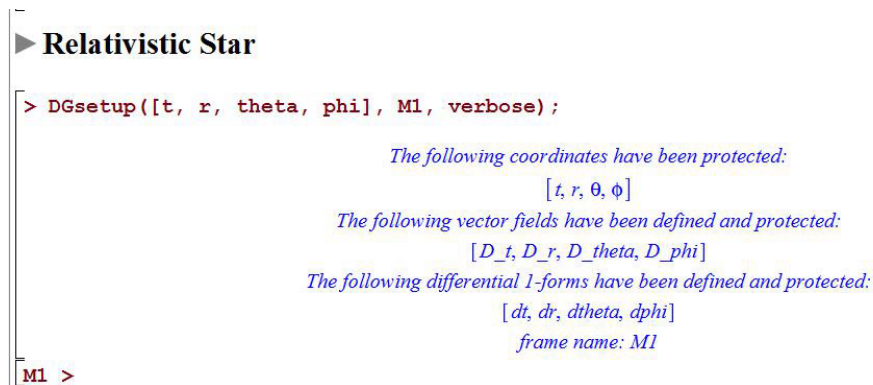
Figure 15.16: plano equatorial

Agora, defina o conjunto de equações:

```
M1 > GeodesicEq := DGinfo(G_{θ = π/2}, "CoefficientSet");
```

$$GeodesicEq := \left\{0, \frac{\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\phi(\tau)\right) r(\tau) + 2\left(\frac{d}{d\tau} r(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau}\phi(\tau)\right)}{r(\tau)}, \frac{1}{r(\tau)^3 (r(\tau) - 2m)}\left(-r(\tau)^5 \left(\frac{d}{d\tau}\phi(\tau)\right)^2 + 4 r(\tau)^4 \left(\frac{d}{d\tau}\phi(\tau)\right)^2 m - 4 r(\tau)^3 \left(\frac{d}{d\tau}\phi(\tau)\right)^2 m^2 + \left(\frac{d^2}{d\tau^2} r(\tau)\right) r(\tau)^4 - 2\left(\frac{d^2}{d\tau^2} r(\tau)\right) r(\tau)^3 m - \left(\frac{d}{d\tau} r(\tau)\right)^2 m\, r(\tau)^2 + r(\tau)^2 \left(\frac{d}{d\tau} t(\tau)\right)^2 m - 4 r(\tau)\left(\frac{d}{d\tau} t(\tau)\right)^2 m^2 + 4\left(\frac{d}{d\tau} t(\tau)\right)^2 m^3\right), \frac{2\left(\frac{d}{d\tau} t(\tau)\right)\left(\frac{d}{d\tau} r(\tau)\right) m}{r(\tau)\,(r(\tau) - 2m)} + \frac{d^2}{d\tau^2} t(\tau)\right\}$$

Figure 15.17: conjunto de PDEs acopladas

15.4 Estrela Relativística

Agora, vamos calcular as equações de estrutura estelar usando o Maple. Nosso elemento de linha é:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{15.9}$$

onde o tensor energia-momento é:

$$T^a{}_b = diag(-\rho(r), P(r), P(r), P(r)) \tag{15.10}$$

para $r < R$ e $T^a{}_b = 0$ para $r \geq R$ onde Ré o raio da estrela. Carregue uma nova seção no Maple:

▶ Relativistic Star

```
> DGsetup([t, r, theta, phi], M1, verbose);
```

The following coordinates have been protected:

$[t, r, \theta, \phi]$

The following vector fields have been defined and protected:

[*D_t, D_r, D_theta, D_phi*]

The following differential 1-forms have been defined and protected:

[*dt, dr, dtheta, dphi*]

frame name: M1

```
M1 >
```

Figure 15.18: carregue pacotes e defina a variedade

Defina a métrica:

```
M1 > g := evalDG( -e^(2·Phi(r)) * dt &t dt + e^(2·Lambda(r)) * dr &t dr + r^2 * (dtheta &t dtheta + sin(θ)^2
        * dphi &t dphi) );
```

$$g := -\left(\left(e^{2\,\Phi(r)}\,dt\right) dt\right) + \left(e^{2\,\Lambda(r)}\,dr\right) dr + \left(r^2\,dtheta\right) dtheta + \left(r^2 \sin(\theta)^2\,dphi\right) dphi$$

Figure 15.19: entre com a métrica

Calcule o tensor de Einstein a partir da métrica:

```
M1 > Ein := EinsteinTensor(g);
```

$$\begin{aligned}Ein :={}& \frac{\left(2\,e^{-2\,\Phi(r)-2\,\Lambda(r)}\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right) r - e^{-2\,\Phi(r)-2\,\Lambda(r)} + e^{-2\,\Phi(r)}\right) D_t}{r^2}\,D_t \\ &+ \frac{e^{-2\,\Lambda(r)}\left(2\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) e^{-2\,\Lambda(r)}\,r + e^{-2\,\Lambda(r)} - 1\right) D_r}{r^2}\,D_r - \left(\frac{1}{r^3}\left(e^{-2\,\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right) r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right) D_theta\right) D_theta\right) \\ &- \left(\frac{1}{r^3 \sin(\theta)^2}\left(e^{-2\,\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right) r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right) D_phi\right) D_phi\right)\end{aligned}$$

Figure 15.20: calcule o tensor de Einstein

Eleve o primeiro índice:

```
M1 > E := RaiseLowerIndices(g, Ein, [1]);
```

$$\begin{aligned}E :={}& -\left(\frac{\left(2\,e^{-2\,\Lambda(r)}\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right) r - e^{-2\,\Lambda(r)} + 1\right) dt}{r^2}\,D_t\right) \\ &+ \frac{\left(2\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) e^{-2\,\Lambda(r)}\,r + e^{-2\,\Lambda(r)} - 1\right) dr}{r^2}\,D_r - \left(\frac{1}{r}\left(e^{-2\,\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right) r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right) dtheta\right) D_theta\right) \\ &- \left(\frac{1}{r}\left(e^{-2\,\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right) r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right) dphi\right) D_phi\right)\end{aligned}$$

Figure 15.21: raise the first index of Einstein tensor

Extraia as componentes:

```
M1 > EinEq := DGinfo(E, "CoefficientSet");
```

$$EinEq := \left\{ \frac{2\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)e^{-2\Lambda(r)}r + e^{-2\Lambda(r)} - 1}{r^2}, -\frac{2e^{-2\Lambda(r)}\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)r - e^{-2\Lambda(r)} + 1}{r^2}, -\frac{1}{r}\left(e^{-2\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right)r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right)\right)\right\}$$

Figure 15.22: extraindo as componentes do tensor de Einstein

Finalmente, deve-se copiar a colar cada componente para montar cada termo das equações de Einstein:

$$G^a{}_b = -8\pi T^a{}_b = -8\pi diag(-\rho(r), P(r), P(r), P(r)) \qquad (15.11)$$

$$\mathtt{M1} > E1 := -\frac{2e^{-2\Lambda(r)}\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)r - e^{-2\Lambda(r)} + 1}{r^2} = -8\cdot \mathrm{Pi}\cdot\rho(r); E2 :=$$
$$\frac{2\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)e^{-2\Lambda(r)}r + e^{-2\Lambda(r)} - 1}{r^2} = 8\cdot \mathrm{Pi}\cdot P(r); E3 :=$$
$$-\frac{1}{r}\left(e^{-2\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right)r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right)\right) = 8\cdot \mathrm{Pi}\cdot P(r);$$

Figure 15.23: copie e cole as componentes do tensor de Einstein

O procedimento gera o seguinte conjunto de equações:

$$E1 := -\frac{2\,e^{-2\Lambda(r)}\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)r - e^{-2\Lambda(r)} + 1}{r^2} = -8\,\pi\,\rho(r)$$

$$E2 := \frac{2\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)e^{-2\Lambda(r)}\,r + e^{-2\Lambda(r)} - 1}{r^2} = 8\,\pi\,P(r)$$

$$E3 := -\frac{1}{r}\left(e^{-2\Lambda(r)}\left(\left(\frac{d}{dr}\Lambda(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)r - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 r - \left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r)\right)r + \frac{d}{dr}\Lambda(r) - \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\right)\right) = 8\,\pi\,P(r)$$

Figure 15.24: conjunto de equações

Este conjunto de equações é equivalente ao conjunto de equações obtido no capítulo 5, seção 4. A partir de agora, a mesma análise pode ser feita, manualmente ou ainda usando-se o Maple.

Chapter 16

A1: Resumo sobre Evolução Estelar

Agradecimentos:

O autor é muito grato à atenção e estímulo por esse trabalho, devido a J.E.Horvath - IAGUSP e N.S.Magalhães - UNIFESP.

16.1 References

[1] D.McMahon, *Relativity Demystified*, McGraw-Hill.

[2] R.Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press.

[3] P.S.Custodio and J.E.Horvath,Holographic Principle bounds on primordial black hole abundances, *Classical and Quantum Gravity*, 813, 20, 2003.

[4] R.D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford.

[5] J.Wheeler, C.Misner and K.S.Thorne, *Gravitation*, W.H.Freeman and Company.

[6] M.Camezind, *Compact Objects in Astrophysics: white dwarfs, neutron stars and black holes*, Springer-Verlag, 2007.

[7] L.Landau, *Classical Theory of Fields*, Pergamon Press.

[8] R.Penrose, *The road to reality: a guide to the laws of the universe*, Alfred A. Knopf (publisher), February 2005.

[9] S.W.Hawking and G.Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, 1973.

[10] P.S.Custodio and J.E.Horvath, Cosmological quintessence accretion onto primordial black holes: conditions for their growth to the supermassive scale, Int.J.Mod.Phys.D14 (2005), 257-274.

[11] P.S.Custodio and J.E.Horvath, Thermodynamics of black holes in finite boxes, Am.J.Phys. 71 (2003), 1237-1241.

[12] B.Carr, T. Harada and H. Maeda Can a primordial black hole or wormhole grows as fast as the universe?, astro-ph 1003.3324.

[13] L.Alabidi and D.Lyth, Inflation models and observation, astro-ph/0510441.

[14] R.Bousso, Bound states and the Bekestein bound, JHEP 0402 (2004) 025.

[15] R.Bousso, The holographic principle,Rev.Mod.Phys.74:825-874, 2002.

[16] T.Banks and W.Fischler, An Holographic Cosmology, astro-ph 0111142v1, 2001.

[17] B.Carr, Primordial Black Holes: Do They Exist and Are They Useful?, astro-ph/0511743v1, 2005.

[18] T.Harada, H.Maeda and B.J.Carr Non-existence of self-similar solutions containing a black hole in a universe with a stiff fluid or scalar field or quintessence,astro-ph/0604225.

[19] M.Yu.Khlopov, Primordial Black Holes, Recent Advances on the Physics of Compact Objects and Gravitational Waves, 2007, Ed. J.A.de Freitas Pacheco.

[20] H.Ohanian, *Gravitation and Space-Time*, W.W.Norton and Company, 1976.

[21] M.P.Hobson et al, *General Relativity: an introduction for physicists*, Cambridge.

[22] P.C.W.Davies, *The search for gravity waves*, Cambridge.

[23] P. Joshi, *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*, Oxford.

[24] G.Hooft, *Introduction to theory of black holes*, ITP-UU-09/11, SPIN-09/11.

[25] A.Gombec, *Unveiling the Secrets of Gamma Ray Bursts*, astro-ph/1206.3127v1.

[26] S.Shapiro and S.Teukolsky, *White dwarfs, neutron stars and black holes: the physics of compact objects*, Wiley.

[27] A.R.Choudhury, *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press, 2010.

[28] S.W.Hawking, *Hawking on the Big Bang and Black Holes*, World Scientific, 1993.